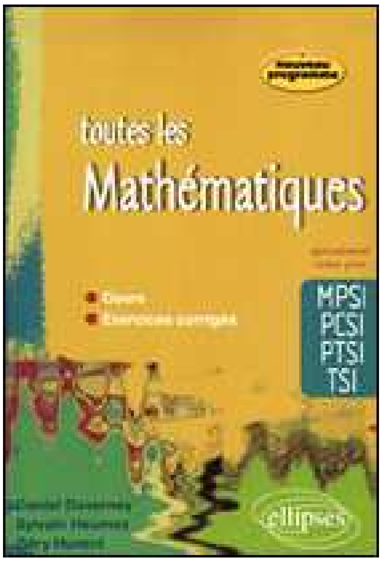
Toutes les Mathématiques

D.Duverney-S.Heumez-G.Huvent



Edition Ellipses 2004

http://www.editions-ellipses.fr/fiche_detaille.asp?identite=4668

CHAPITRE 15
INTEGRALES

L'intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$ s'introduit naturellement en considérant les variations des primitives de f. Nous donnons les principales propriétés mathématiques des intégrales et leurs principaux modes de calcul, qui découlent des procédés de calcul des primitives. La dernière section est consacrée à quelques applications du calcul intégral. Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :

A. Connaître la définition et les propriétés élémentaires des intégrales.
B. Savoir effectuer une intégration par parties dans une intégrale.
C. Savoir effectuer un changement de variable dans une intégrale.
D. Savoir utiliser le calcul intégral dans des applications simples en Géométrie et en Physique.

15.1. Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé $[a,b]$. On sait (théorème fondamental 14.1) que f admet des primitives sur $[a,b]$. Soit F l'une d'entre elles. Nous faisons varier x de a à b, par accroissements infinitésimaux dx. Si nous posons $z = F(x)$, l'accroissement infinitésimal dz de z correspondant à un accroissement infinitésimal dx de x s'obtient par la relation :

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = F'(x)}$$

Mais puisque F est une primitive de f sur $[a,b]$, on a $F'(x) = f(x)$; il en résulte :

$$\boxed{dz = f(x)dx}$$

Or l'*accroissement total* de F lorsque x varie de a à b sera la *somme* de tous les accroissements infinitésimaux dz lorsque x varie de a à b ; il sera aussi égal à la variation totale de F entre a et b, c'est-à-dire $F(b) - F(a)$. Suivant Leibniz, notons par un S très allongé cette somme d'accroissements infinitésimaux. On obtient :

$$\boxed{F(b) - F(a) = \int_{x=a}^{x=b} dz = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx} \qquad (15.1)$$

On lit : *Somme lorsque x varie de a à b de $f(x)dx$.*

Les considérations ci-dessus sont la clé de l'application du calcul intégral en Physique et en Sciences Industrielles. Elles nous conduisent à poser la définition suivante :

Définition 15.1. *Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle* $[a,b]$. *On appelle intégrale de f sur* $[a,b]$ *le nombre :*

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b} \tag{15.2}$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Remarque 15.1. La définition de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie (heureusement !). En effet, si on choisit une autre primitive G de f sur $[a, b]$, alors $G(x) = F(x) + C$, où C est une constante. Donc $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.

Remarque 15.2. La variable d'intégration x disparaît dans le calcul de l'intégrale, puisque la valeur de celle-ci ne dépend que de la valeur initiale et de la valeur finale de F. On dit que x est une *variable muette*. Ainsi, on a par exemple :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt}$$

Exemple 15.1. La fonction $x \to \dfrac{1}{1+x^2}$ est définie et continue sur $[0, 1]$ et

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}}$$

15.2. Interprétation géométrique de l'intégrale

Supposons que $a \le b$. Faisons varier x de a à b par accroissements infinitésimaux $dx > 0$ (figure 15.1). Si $f(x) \ge 0$, on voit que $f(x)dx$ représente la surface du rectangle infinitésimal de base dx et de hauteur $f(x)$; par contre, si $f(x) \le 0$, $f(x)dx$ représente l'opposé de cette surface (qui est une nombre positif, alors que $f(x)dx$ est négatif). La somme des surfaces de ces rectangles infinitésimaux est égale à la surface comprise entre la courbe et l'axe des x.

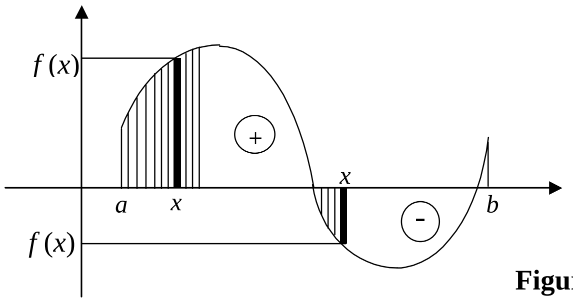


Figure 15.1

On compte donc en positif les surfaces situées au-dessus de l'axe des x, en négatif celles situées au-dessous. On parle alors d'*aire algébrique* et on a le :

Théorème 15.1. *Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$, avec $a \le b$. Alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire algébrique comprise entre la courbe représentative (C) de f et l'axe des x, d'une part, et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, d'autre part.*

Cette interprétation graphique est à la base de la plupart des *méthodes numériques de calcul des intégrales*. Expliquons la plus simple d'entre elles, *la méthode des rectangles*, sur l'intégrale de l'exemple 15.1. On divise l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en n intervalles de même largeur (sur la figure 15.2, $n = 10$).

On note :

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ x_2 = a + 2\frac{b-a}{n},\ \cdots x_n = b,$$

les points de subdivision. On voit apparaître ainsi n rectangles, chacun de surface $\frac{b-a}{n} f(x_i)$, et par conséquent une valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a,b]$ est donnée par la somme des surfaces de ces rectangles, c'est-à-dire :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)} \tag{15.3}$$

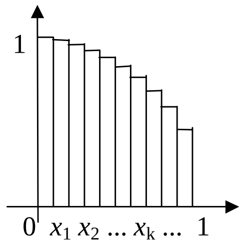


Figure 15.2

On notera que, dans le cas de notre exemple, (15.3) fournit une approximation par défaut de l'intégrale ; on obtiendrait une approximation par excès grâce à la formule

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)} \tag{15.4}$$

A titre d'illustration, appliquons ces formules avec $n = 1000$ à l'exemple de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[0,1]$. Il vient :

$$\frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} f\left(\frac{k}{1000}\right) \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \leq \frac{1}{1000} \sum_{k=0}^{999} f\left(\frac{k}{1000}\right),$$

c'est-à-dire $1000 \sum\limits_{k=1}^{1000} \dfrac{1}{1000000+k^2} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \leq 1000 \sum\limits_{k=0}^{999} \dfrac{1}{1000000+k^2}$.

Un programme informatique simple permet d'obtenir :

$$0{,}7851481217 \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \leq 0{,}7856481217.$$

Puisqu'on sait que cette intégrale vaut $\frac{\pi}{4}$, on en déduit un encadrement de π :

$$3{,}140592487 \leq \pi \leq 3{,}142592487.$$

Cet encadrement permet d'écrire $\pi \simeq 3{,}14$ avec deux décimales exactes.

Il existe des méthodes plus performantes que la méthode des rectangles, notamment la *méthode des trapèzes* ou la *méthode de Simpson* ; cette dernière est la plus performante des trois.

15.3. Propriétés élémentaires des intégrales

Les propriétés suivantes sont des conséquences directes de la définition (voir exercice 15.1) :

Théorème 15.2. *Soit f définie et continue sur l'intervalle I, et soient a, b, $c \in I$. Alors :*

$$\begin{cases} \boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx} \\ \boxed{\int_a^a f(x)dx = 0} \\ \boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx} \end{cases}$$

La première de ces égalités est connue sous le nom de *relation de Chasles*, à cause de son évidente similarité avec la relation de Chasles pour les vecteurs.

Théorème 15.3. *Soit* $a \geq 0$. *Soit f définie et continue sur* $[-a, +a]$. *On suppose que f est paire. Alors :*

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx}$$

Théorème 15.4. *Soit* $a \geq 0$. *Soit f définie et continue sur* $[-a, +a]$. *On suppose que f est impaire. Alors :*

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0}$$

La démonstration de ces deux théorèmes est proposée en exercice (exercice 15.2), mais le résultat se voit aisément sur un graphique (figure 15.3).

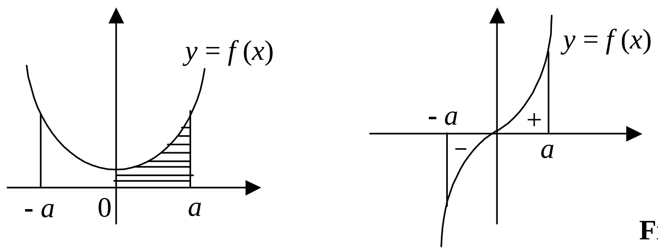


Figure 15.3

Dans le cas d'une fonction paire, l'aire sous la courbe entre $-a$ et a vaut deux fois l'aire sous la courbe entre 0 et a. Dans le cas d'une fonction impaire, les aires sont les mêmes à droite et à gauche de O, mais elles doivent être comptées avec des signes opposés, donc l'aire algébrique totale est nulle.

Théorème 15.5. *Soit f une fonction définie et continue sur* $\mathbb{R}$, *périodique de période T. Alors l'intégrale* $\int_a^{a+T} f(t)dt$ *ne dépend pas de a.*

Géométriquement, ce résultat s'interprète grâce à la figure 15.4. Il signifie que, lorsqu'on intègre une fonction périodique de période T sur un intervalle de *longueur égale à une période*, le résultat est *indépendant* de l'intervalle choisi.

Pour le démontrer, posons $G(a) = \int_a^{a+T} f(t)dt$.

En notant F *une* primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a par définition de l'intégrale :

$$G(a) = F(a+T) - F(a).$$

On en déduit que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$G'(a) = F'(a+T) - F'(a) = f(a+T) - f(a).$$

Or f est périodique de période T, donc $G'(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Il en résulte que $G(a)$ est une constante, donc ne dépend pas de a, C.Q.F.D.

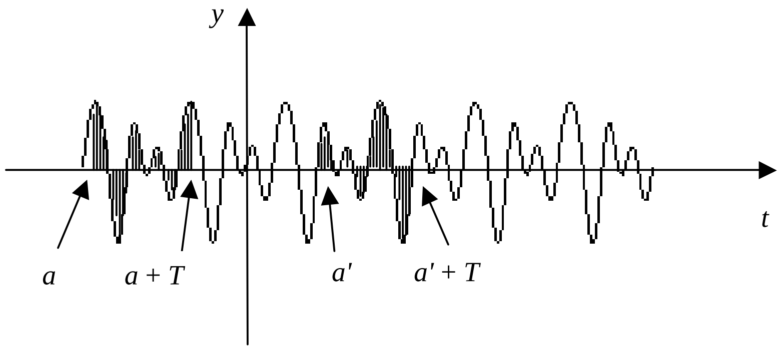


Figure 15.4

Théorème 15.6. *Soient f et g deux fonctions définies et continues sur* $[a, b]$, *et soient* α *et* β *des nombres réels ou complexes. Alors*

$$\boxed{\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx} \tag{15.5}$$

Ce résultat est connu sous le nom de *linéarité de l'intégrale*. En effet, il exprime que la transformation φ, qui associe à toute fonction continue sur $[a, b]$ son intégrale, est linéaire ; en effet (15.5) s'écrit

$$\boxed{\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)}$$

Voir l'exercice 15.3 pour la démonstration de (15.5).

15.4. Intégration par parties

En prenant la formule d'intégration par parties pour les primitives (14.10) et en faisant varier x entre a et b, on obtient par définition de l'intégrale la formule d'intégration par parties pour les intégrales :

$$\boxed{\int_a^b uv'dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'vdx} \tag{15.6}$$

Exemple 15.2. Calculer en intégrant 2 fois par parties : $I = \int_0^\pi e^{-x}\cos x dx$.

On intègre par parties une première fois en posant :

$$u = e^{-x} \quad ; \quad u' = -e^{-x}$$
$$v' = \cos x \quad ; \quad v = \sin x$$

On obtient $I = [e^{-x}\sin x]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-x}\sin x dx = \int_0^\pi e^{-x}\sin x dx$. On intègre par parties de nouveau en dérivant encore l'exponentielle :

$$u = e^{-x} \quad ; \quad u' = -e^{-x}$$
$$v' = \sin x \quad ; \quad v = -\cos x$$

Il vient $I = [-e^{-x}\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-x}\cos x dx = e^{-\pi} + 1 - I$.

$$\boxed{I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 dt} \tag{15.11}$$

Ainsi I_{eff}^2 est la valeur moyenne de $i(t)^2$ sur une période T. On notera que cette moyenne ne dépend pas de la période choisie en vertu du théorème 15.5.

Achevons le calcul dans le cas où $I = I_0 \cos(\omega t)$, avec $\omega > 0$. Alors $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et

$$I_{eff}^2 = \frac{I_o^2}{T}\int_0^T \cos^2\omega t dt.$$

Cette intégrale se calcule classiquement par linéarisation (exercice 14.7) :

$$I_{eff}^2 = \frac{I_o^2}{2T}\int_0^T (1+\cos 2\omega t)dt = \frac{I_o^2}{2T}\left[t + \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_0^T = \frac{I_o^2}{2}.$$

On en déduit que $I_{eff} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$.

EXERCICES DU CHAPITRE 15

Les basiques

Exercice 15.1 (A) : Démontrer le théorème 15.2.

Exercice 15.2 (A,C) : En utilisant la relation de Chasles et le changement de variable $t = -x$, démontrer les théorèmes 15.3 et 15.4.

Exercice 15.3 (A) : Démontrer la linéarité de l'intégrale (théorème 15.6).

Exercice 15.4 (A) : Démontrer que, pour toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$\boxed{\int_a^b \mathrm{Re}[f(x)]dx = \mathrm{Re}\int_a^b f(x)dx} \quad ; \quad \boxed{\int_a^b \mathrm{Im}[f(x)]dx = \mathrm{Im}\int_a^b f(x)dx}$$

Utiliser ces résultats pour calculer $I = \int_0^\pi e^{-x}\cos x dx$.

Exercice 15.5 (A) : Calculer les intégrales suivantes :

$$W = p_0 v_0 \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v^\gamma}\ (\gamma \neq 1)\ ;\ B = \int_0^1 \frac{z}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}dz\ ;\ Q = \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Exercice 15.6 (A) : Expliquer pourquoi l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin x}{1 - p\cos^2 x}dx$ existe pour $p < 1$. La calculer dans ce cas.

Exercice 15.7 (A) : Calculer les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x.\cos 6x.\,dx \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\tan 2x)^2 dx.$$

Exercice 15.8 (B) : Calculer en intégrant par parties ($a > 0$ et $p > 0$) :

$$I = \int_0^\pi x\sin 3x dx \quad ; \quad J = \int_0^a \arctan\frac{y}{a}dy \quad ; \quad K = \int_0^{\frac{p}{2}} \ln\frac{p-t}{p}dt.$$

Exercice 15.9 (C) : Calculer les intégrales suivantes, grâce aux changements de variable indiqués. Dans le cas où l'intégrale dépend d'un paramètre a, celui-ci est strictement positif.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (x = \sin t)\ ; \qquad I_2 = \int_{-a}^{+a} \frac{dz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (z = a\,\mathrm{sh}\,t)\ ;$$

$$I_3 = \int_0^{+a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} dx \quad (x = a\sin t)\ ; \qquad I_4 = \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{sh}^2\theta}{\mathrm{ch}\,\theta} d\theta \qquad (u = \mathrm{sh}\,\theta).$$

Exercice 15.10 (D) : On donne un cône de révolution, avec $O\Omega = h$, $OA = R$, $\Omega A = l$ (figure 15.9).
1) Calculer sa surface latérale S.
2) Pour fabriquer ce cône, on découpe, dans une feuille de carton, le secteur circulaire représenté figure 15.10. Calculer θ en fonction de l et R.

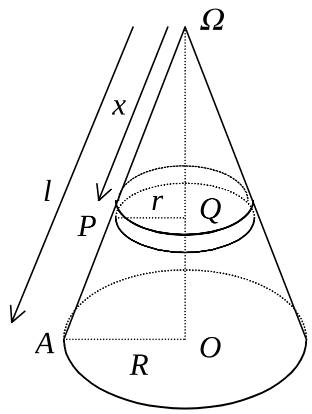


Figure 15.9

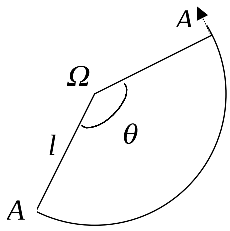


Figure 15.10

Exercice 15.11 (D) : On fait tourner la courbe d'équation $y = x^2$ autour de l'axe des y (voir la figure 15.11). Trouver le volume du solide obtenu, limité à la hauteur h.

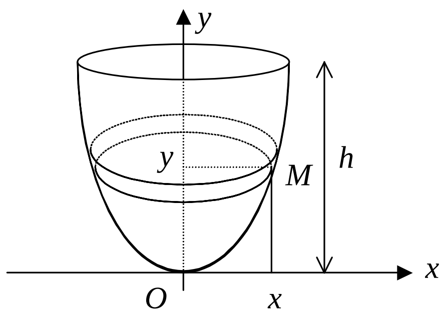


Figure 15.11

Exercice 15.12 (A,B) : Calculer l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin 2x dx$ de deux manières différentes :
1) En utilisant une double intégration par parties.

2) En utilisant les exponentielles complexes.

Exercice 15.13 (A,C) : Calculer l'intégrale $I = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}dx$ de deux manières différentes :

1) En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x+1}+1$

2) En multipliant numérateur et dénominateur de la fonction à intégrer par $\sqrt{x+1}-1$.

Exercice 15.14 (A,D) : Un rayon lumineux cylindrique de rayon $r \leq R$ frappe une sphère de rayon R, de telle sorte que l'axe du cylindre passe par le centre de la sphère. Montrer que la surface découpée sur la sphère par ce rayon lumineux vaut $S = 2\pi R^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\arcsin\left(\frac{r}{R}\right)} \sin\theta d\theta$.

Calculer cette surface et l'écrire sous la forme la plus simple possible.

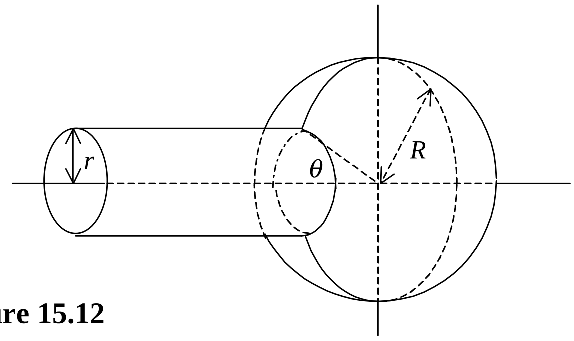


Figure 15.12

Exercice 15.15 (A) : Soit $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$.

1) Montrer qu'il existe a et b réels, tels que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = b\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + a.$$

2) Soit $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; calculer $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$.

Exercice 15.16 (B,C) : Calculer $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

On utilisera deux méthodes différentes.

Les techniques

Exercice 15.17 : Démontrer que :

$$\frac{d^2-R^2}{4d^2}\int_{d-R}^{d+R} \frac{r^2+d^2-R^2}{r^5}dr = \frac{Rd}{(d^2-R^2)^2}.$$

Exercice 15.18 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x} \quad ; \quad I = \int_0^{\pi} \theta \sin^2\theta d\theta \quad ; \quad K = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx.$$

Exercice 15.19 :Une cuve cylindrique horizontale de longueur l (voir figure 15.13) contient du liquide sur une hauteur h. Montrer que le volume V de ce liquide vaut

Exercice 14.17 : La fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ est continue sur $I =]0,+\infty[$. On se place sur cet intervalle. On a $u^6 = x \Rightarrow dx = 6u^5 du$, $\sqrt{x} = u^3$ et $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = u^2$.

On en déduit que $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6u^5}{u^3 + u^2} du = 6\int \frac{u^3}{u+1} du$.

Or on a $u^3 + 1 = (u+1)(u^2 - u + 1)$, par conséquent :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{u^3+1-1}{u+1} du = 6\int\left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}\right)du$$

$$= 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6\ln|u+1| + C = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C$$

Exercice 14.18 : Il s'agit d'une équation à variable séparables :

$$y' + \cos(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{\cos(y)} = -1 \Rightarrow \int \frac{dy}{\cos(y)} = -\int dx.$$

Grâce au résultat de l'exercice 14.13 on obtient :

$$\int \frac{dy}{\cos(y)} = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = -x + C$$

Avec $y(\pi) = 0$, il vient $\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0 = -\pi + C$. Ainsi $\ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \pi - x$.

Donc $y = 2\arctan(e^{\pi - x}) - \dfrac{\pi}{2}$.

Solutions des exercices du chapitre 15

Exercice 15.1 : 1) Soit F une primitive de f sur l'intervalle I. Par définition de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2) De même $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$.

3) Enfin on a $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)dx$.

Exercice 15.2 : 1) Démontrons d'abord le théorème 15.3. Par la relation de Chasles :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Dans la première intégrale, faisons le changement de variable $t = -x \Leftrightarrow x = -t$. Alors $\dfrac{dx}{dt} = -1$, donc $dx = -dt$. De plus $t = a$ pour $x = -a$ et $t = 0$ pour $x = 0$. D'où :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx.$$

Or f est paire, donc $f(-t) = f(t)$; par conséquent :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

2) Le théorème 15.4 se démontre de même. Par la relation de Chasles :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

On fait le changement de variable $t = -x$ dans la première intégrale, et on obtient

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Ici f est impaire, donc $f(-t) = -f(t)$ et il vient :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0.$$

Exercice 15.3 : D'après les règles de calcul sur les dérivées, pour tout couple de réels ou complexes (α, β) et tout couple de fonctions dérivables (F, G), on a :

$$[\alpha F(x) + \beta G(x)]' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) \qquad (*)$$

On dit que la dérivation est une opération *linéaire*, puisque l'égalité ci-dessus signifie que l'*opérateur de dérivation* φ, qui à tout fonction dérivable associe sa dérivée $[\varphi(F) = F']$ est linéaire, c'est-à-dire qu'on a :

$$\boxed{\varphi(\alpha F + \beta G) = \alpha\varphi(F) + \beta\varphi(G)}$$

On déduit immédiatement de $(*)$ que, si F est une primitive de f et G une primitive de g, alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$. Donc, par définition de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b}[\alpha f(x) + \beta g(x)]dx &= [\alpha F(b) + \beta G(b)] - [\alpha F(a) + \beta G(a)] \\ &= \alpha[F(b) - F(a)] + \beta[G(b) - G(a)] = \alpha\int_{a}^{b} f(x)dx + \beta\int_{a}^{b} g(x)dx.\end{aligned}$$

Exercice 15.4 : Posons $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, avec $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$ et $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$. Par linéarité de l'intégrale, on peut écrire :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b}[f_1(x) + if_2(x)]dx = \int_{a}^{b} f_1(x)dx + i\int_{a}^{b} f_2(x)dx.$$

Il en résulte immédiatement que :

$$\operatorname{Re}\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f_1(x)dx = \int_{a}^{b}\operatorname{Re} f(x)dx; \operatorname{Im}\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f_2(x)dx = \int_{a}^{b}\operatorname{Im} f(x)dx.$$

Ceci peut encore s'énoncer : *La partie réelle de la somme est la somme de la partie réelle et la partie imaginaire de la somme est la somme de la partie imaginaire.*

Application : Utilisons les exponentielles complexes pour calculer $I = \int_{0}^{\pi} e^{-x}\cos x dx$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{0}^{\pi}\operatorname{Re}(e^{-x}e^{ix})dx = \operatorname{Re}\left(\int_{0}^{\pi} e^{(-1+i)x}dx\right) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{-1+i}e^{(-1+i)x}\right]_{0}^{\pi} \\ &= \operatorname{Re}\left[\frac{-1-i}{2}e^{-x}(\cos x + i\sin x)\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}[(1+i)(e^{-\pi}+1)] = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1).\end{aligned}$$

Exercice 15.5 : 1) $W = p_0 v_0\int_{v_0}^{v_1} v^{-\gamma}dv = \dfrac{p_0 v_0}{-\gamma+1}[v^{-\gamma+1}]_{v_0}^{v_1} = \dfrac{p_0 v_0}{1-\gamma}\left[v_1^{1-\gamma} - v_0^{1-\gamma}\right].$

2) $B = \int_0^1 \frac{zdz}{\sqrt{1+z^2}} = \left[\sqrt{1+z^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$

3) $Q = \int_0^R \rho(1+\rho^2)^{-\frac{3}{2}} d\rho = \left[-(1+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^R = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+R^2}}.$

Exercice 15.6 : Lorsque $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2 x$ varie entre 1 et 0. Puisque $p < 1$, on a donc $1 - p\cos^2 x > 0$. Le dénominateur ne s'annulant pas sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $f(x) = \frac{\cos x \sin x}{1 - p\cos^2 x}$ est *définie et continue* sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et l'intégrale existe. Pour la calculer, remarquons que la dérivée de $1 - p\cos^2 x$ est $2p\sin x\cos x$; ainsi le numérateur est, à un facteur près, la dérivée du dénominateur. L' intégrale se ramène donc à $\int \frac{u'}{u} dx$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin x}{1 - p\cos^2 x} dx = \left[\frac{1}{2p} \ln|1 - p\cos^2 x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{2p} \ln(1-p).$$

Exercice 15.7 : Pour I, on utilise les formules de transformation de produits en sommes :

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 7x + \cos 5x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{5}\sin 5x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}\sin\frac{7\pi}{3} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -\frac{\sqrt{3}}{70}.$$

On calcule J en développant et en se rappelant que $1 + \tan^2 x$ est la dérivée de $\tan x$:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \tan^2 2x + 2\tan 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1 + \tan^2 2x + 2\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\tan 2x - \ln|\cos 2x|\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{3} - \ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln 2.$$

Exercice 15.8 :

$$I = \left[-\frac{x}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \cos 3x dx = -\frac{1}{3}[x\cos 3x]_0^{\pi} + \frac{1}{9}[\sin 3x]_0^{\pi} = \frac{\pi}{3}.$$

$$J = \left[y\arctan\frac{y}{a}\right]_0^a - a\int_0^a \frac{y}{a^2+y^2}dy = a\arctan 1 - \frac{a}{2}[\ln(a^2+y^2)]_0^a$$

$$= a\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}(\ln 2a^2 - \ln a^2) = a\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\ln\frac{2a^2}{a^2} = \frac{a}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right).$$

$$K = \left[t\ln\frac{p-t}{p}\right]_0^{\frac{p}{2}} + \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{t}{p-t}dt = -\frac{p}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{p}{2}}\left(\frac{t-p}{p-t} + \frac{p}{p-t}\right)dt$$

$$= -\frac{p}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{p}{2}}\left(-1 + \frac{p}{p-t}\right)dt = -\frac{p}{2}\ln 2 + [-t - p\ln|p-t|]_0^{\frac{p}{2}}$$

$$= -\frac{p}{2}\ln 2 - \frac{p}{2} - p\ln\frac{p}{2} + p\ln p = \frac{p}{2}(\ln 2 - 1).$$

Exercice 15.9 : 1) $x = \sin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow dx = \cos t dt.$

Lorsque $x = 0,\ t = 0$ et lorsque $x = \frac{\sqrt{3}}{2},\ t = \frac{\pi}{3}$. Donc :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{\cos^3 t}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^2 t} = [\tan t]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}.$$

2) On intégre une fonction paire sur un intervalle $[-a,+a]$. Donc $I_2 = 2\int_0^a \frac{dz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Alors $z = a \operatorname{sh} t \Rightarrow \frac{dz}{dt} = a \operatorname{ch} t \Rightarrow dz = a \operatorname{ch} t dt.$

Lorsque $z = 0,\ t = 0$ et lorsque $z = a,\ t = \arg\operatorname{sh} 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) = A.$ Donc :

$$I_2 = 2\int_0^a \frac{dz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\int_0^A \frac{a \operatorname{ch} t dt}{\left(a^2+a^2\operatorname{sh}^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a^2}\int_0^A \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{2}{a^2}[\operatorname{th} t]_0^A$$

$$= \frac{2}{a^2}\left[\frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}}\right]_0^A = \frac{1}{a^2\sqrt{2}} \quad (\text{car } \operatorname{sh} A = 1).$$

3) $x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t dt$. Lorsque $x = 0,\ t = 0$ et lorsque $x = a,\ t = \frac{\pi}{2}$.
Donc :

$$I_3 = \int_0^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}} a\cos t dt = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt.$$

On linéarise $\cos^4 t = (\cos^2 t)^2 = \frac{1}{4}(1+\cos 2t)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)$

$$= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\frac{1}{2}(1+\cos 4t)\right) = \frac{1}{8}(3+4\cos 2t+\cos 4t).$$

D'où $I_3 = \frac{a}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3+4\cos 2t+\cos 4t)dt = \frac{a}{8}\left[3t+2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}a.$

4) $u = \operatorname{sh}\theta \Rightarrow du = \operatorname{ch}\theta d\theta$. Lorsque $\theta = 0$, $u = 0$, et lorsque $\theta = 1$, $u = \operatorname{sh}(\ln 2) = \frac{3}{4}$.

Par conséquent : :

$$I_4 = \int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{sh}^2\theta}{\operatorname{ch}\theta} d\theta = \int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{sh}^2\theta}{\operatorname{ch}^2\theta} \operatorname{ch}\theta d\theta = \int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{sh}^2\theta}{1+\operatorname{sh}^2\theta} \operatorname{ch}\theta d\theta = \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{u^2}{1+u^2} du$$

$$= \int_0^{\frac{3}{4}} \left(\frac{u^2+1}{1+u^2} - \frac{1}{1+u^2}\right) du = [u - \arctan u]_0^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} - \arctan\left(\frac{3}{4}\right).$$

Exercice 15.10 : 1) On découpe le cône en tranches infinitésimales. Chaque tranche a une surface infinitésimale dS, qui est un rectangle de longueur $2\pi r$ et de largeur dx (découpée sur la génératrice du cône). Donc $dS = 2\pi r.dx$ et $S = \int_{x=0}^{x=l} dS = 2\pi\int_{x=0}^{x=l} r dx.$

Il reste à exprimer r en fonction de x ; les triangles ΩAO et ΩPQ étant homothétiques, on a $\frac{r}{R} = \frac{x}{l}$, par conséquent $r = \frac{R}{l}x$. On en déduit