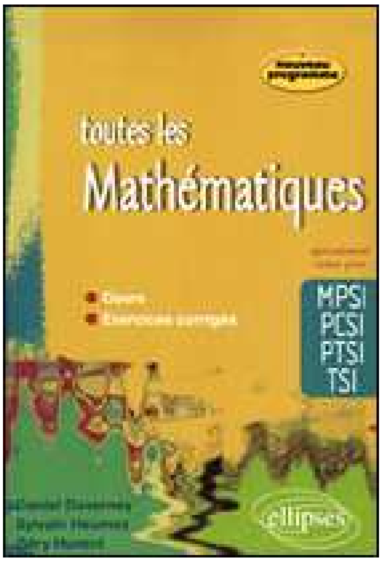
Toutes les Mathématiques

D.Duverney-S.Heumez-G.Huvent



Edition Ellipses 2004

http://www.editions-ellipses.fr/fiche_detaille.asp?identite=4668

CHAPITRE 28
ANALYSE VECTORIELLE

L'analyse vectorielle fait intervenir à la fois des outils analytiques (dérivées partielles) et du calcul vectoriel. Les notions de base de l'analyse vectorielle sont indispensables en électrostatique et en électromagnétisme notamment.
Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :
A. Connaître les opérateurs de l'analyse vectorielle (nabla, gradient, divergence et rotationnel) et savoir démontrer leurs propriétés.
B. Savoir calculer des intégrales de surface simples.
C. Connaître la définition du flux d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée, et savoir calculer des flux simples.
D. Savoir ce qu'est un champ à flux conservatif.
E. Connaître les formules de Stokes et d'Ostrogradski.
F. Savoir ce qu'est un angle solide.

28.1. Opérateurs de l'analyse vectorielle

L'espace étant rapporté à la base orthonormale directe $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on définit l'opérateur aux dérivées partielles *nabla* par :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{dx}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}} \qquad (28.1)$$

On notera que *nabla* est un *opérateur aux dérivées partielles*, et pas un vecteur. Il opère *à gauche* en utilisant les trois types de multiplication vectorielle.

Soit d'abord $U = U(M)$ une fonction de trois variables (fonction scalaire) ; on définit le *gradient* de U par :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \vec{\nabla} U = \left(\frac{\partial}{dx}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)U = \frac{\partial U}{dx}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}} \qquad (28.2)$$

On retrouve la définition 25.12.

Soit maintenant $\vec{E} = \vec{E}(M) = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$ un champ de vecteurs ; on définit la *divergence* et le *rotationnel* de $\vec{E}$ respectivement par :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{div}\,\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} = \left(\frac{\partial}{dx}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left(E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}\right), \text{ d'où :} \\ \boxed{\text{div}\,\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_x}{dx} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}} \qquad (28.3) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{dx} \\ \dfrac{\partial}{dy} \\ \dfrac{\partial}{dz} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \text{ d'où :} \\ \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = \left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\dfrac{\partial E_z}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}} \end{array}\right. \qquad (28.4)$$

Remarque 28.1. L'opérateur nabla est essentiellement une *notation*, très commode pour retenir les définitions du gradient, de la divergence et du rotationnel et retrouver les formules (28.2), (28.3) et (28.4).

Exemple 28.1. Soit k un paramètre. Considérons le *champ newtonien* défini en coordonnées sphériques [voir (25.16)] par $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(M) = \dfrac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$.

Puisque $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = k\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3} = \dfrac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\right)} \qquad (28.5)$$

Il en résulte que :

$$\text{div}\,\overrightarrow{E} = k\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)\right].$$

En utilisant la formule qui donne la dérivée d'un produit, il vient :

$$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$
$$= (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(x^2+y^2+z^2-3x^2) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x^2+y^2+z^2).$$

Les dérivées partielles par rapport à y et z s'obtiennent sans calcul, en permutant les rôles de x et y et ceux de x et z respectivement. Ainsi :

$$\text{div}\,\overrightarrow{E} = k(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}[(-2x^2+y^2+z^2)+(x^2-2y^2+z^2)+(x^2+y^2-2z^2)],$$

c'est-à-dire $\text{div}\,\overrightarrow{E} = 0$. *Un champ newtonien est à divergence nulle.*

Le lecteur calculera $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}$ et vérifiera que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ (exercice 28.1).

Remarque 28.2. Composons la divergence et le gradient :

$$\text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,U\right) = \text{div}\left(\dfrac{\partial U}{dx}\overrightarrow{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\overrightarrow{k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{dx}\left(\frac{\partial U}{dx}\right) + \frac{\partial}{dy}\left(\frac{\partial U}{dy}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{dz}\right) = \frac{\partial^2 U}{dx^2} + \frac{\partial^2 U}{dy^2} + \frac{\partial^2 U}{dz^2}.$$

On introduit ainsi un nouvel opérateur, le *Laplacien* :

$$\boxed{\Delta U = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U\right) = \overrightarrow{\nabla}^2 U = \frac{\partial^2 U}{dx^2} + \frac{\partial^2 U}{dy^2} + \frac{\partial^2 U}{dz^2}} \qquad (28.6)$$

A partir des définitions, on démontre un grand nombre de *formules d'analyse vectorielle*. Les deux plus importantes, qui doivent être connues, sont :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U\right) = \overrightarrow{0}} \quad ; \quad \boxed{\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{E}\right) = 0} \qquad (28.7)$$

Voir l'exercice 28.2 pour leur démonstration. Les exercices 25.12 et 28.3 donnent d'autres exemples de formules utiles.

28.2. Surfaces de l'espace

28.2.1. Représentation d'une surface

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, une surface (Σ) est définie par une équation de la forme $F(x,y,z) = 0$.

Par exemple, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est celle d'un plan, tandis que l'équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$ est celle de la sphère de centre Ω de rayon R. Un troisième exemple important est le suivant :

Exemple 28.2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. L'équation cartésienne :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \qquad (28.8)$$

est celle d'un *ellipsoïde* de centre O, d'axes principaux Ox, Oy, Oz. Pour visualiser cette surface, coupons-la par exemple par un plan horizontal d'équation $z = z_0$, avec $-c \leq z_0 \leq c$. La section correspondante a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Il s'agit donc d'une ellipse. Ainsi la section d'un ellipsoïde par un plan horizontal est une ellipse. Il en est de même lorsqu'on coupe l'ellipsoïde par un plan $x = x_0$ ou $y = y_0$. Ainsi un ellipsoïde a la forme d'un ballon de rugby aplati, comme représenté figure 28.1 page suivante . Si $a = b = c = R$, l'ellipsoïde est la sphère de centre O de rayon R.

Il sera souvent commode d'utiliser une représentation paramétrique d'une surface. Puisqu'une surface est un objet à deux dimensions, il sera nécessaire d'utiliser deux paramètres. Ainsi une représentation paramétrique d'une surface sera de la forme : $x = f(u,v)$; $y = g(u,v)$; $z = h(u,v)$.

On parlera alors de *nappe paramétrée*.

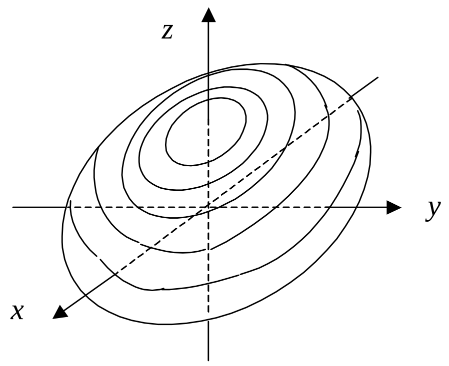


Figure 28.1 : Ellipsoïde

Exemple 28.3. La surface de la sphère de centre O de rayon R peut être paramétrée par :

$$\boxed{x = R\sin\theta\cos\varphi\,;\ y = R\sin\theta\sin\varphi\,;\ z = R\cos\theta} \tag{28.9}$$

où θ varie entre 0 et π, tandis que φ varie entre 0 et 2π (figure 28.2). En effet, le paramétrage (28.9) n'est pas autre chose que les formules de passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes, avec $r = R$, puisque le point M se déplace à la surface de la sphère.

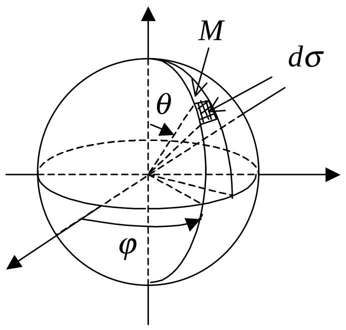


Figure 28.2

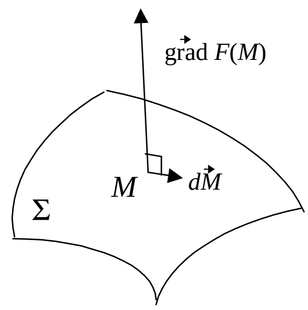


Figure 28.3

28.2.2. Vecteur normal à une surface

Théorème 28.1. *Un vecteur normal à la surface* (Σ) *d'équation cartésienne* $F(x,y,z) = 0$ *au point* $M(x,y,z)$ *est le vecteur* $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{\text{grad}}\, F(M)$.

Démonstration : Déplaçons le point M d'un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{dM}$ en restant sur la surface (Σ) (figure 28.3). Alors F reste égal à 0 dans ce déplacement, de telle sorte que $dF = 0$. Or on sait que $dF = \overrightarrow{\text{grad}}\, F(M).\overrightarrow{dM}$. Il en résulte que $\overrightarrow{\text{grad}}\ F(M).\overrightarrow{dM} = 0$ pour tout déplacement $\overrightarrow{dM}$ sur (Σ), c'est-à-dire que $\overrightarrow{\text{grad}}\ F(M)$ et $\overrightarrow{dM}$ sont orthogonaux pour tout déplacement infinitésimal sur la surface de (Σ) à partir de M. Ainsi $\overrightarrow{\text{grad}}\ F(M)$ est bien normal à (Σ) au point M.

Exemple 28.4. Si (P) est le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, un vecteur normal à (P) est $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{\text{grad}}\, F = \frac{\partial F}{dx}\overrightarrow{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{k} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k}.$

Ici le vecteur normal est indépendant de $M,$ et on retrouve le théorème 7.2.

Exemple 28.5. Un vecteur normal au point $M(x, y, z)$ de l'ellipsoïde d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

est $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{\text{grad}}\, F = \frac{\partial F}{dx}\overrightarrow{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{k} = 2\left(\frac{x}{a^2}\overrightarrow{i} + \frac{y}{b^2}\overrightarrow{j} + \frac{z}{c^2}\overrightarrow{k}\right).$

Dans le cas de la sphère de centre O de rayon $R,$ on voit que :

$$\overrightarrow{N} = \frac{2}{R^2}\left(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\right) = \frac{2}{R^2}\overrightarrow{OM}.$$

On retrouve ainsi que le rayon $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à la surface de la sphère.

Remarque 28.3. Etant donné un vecteur normal $\overrightarrow{N}$ en un point M d'une surface $(\Sigma),$ on peut définir deux vecteurs normaux unitaires en M (figure 28.4) :

$$\overrightarrow{n_1} = \frac{\overrightarrow{N}}{\left\|\overrightarrow{N}\right\|} \quad ; \quad \overrightarrow{n_2} = -\frac{\overrightarrow{N}}{\left\|\overrightarrow{N}\right\|} = -\overrightarrow{n_1}.$$

Lorsqu'on a choisi un des deux vecteurs normaux unitaires, on dit qu'on a *orienté* la surface $(\Sigma).$ Ceci revient à définir un *sens positif de traversée* de (Σ) (dans le sens du vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}$ choisi).

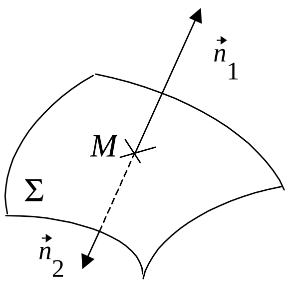


Figure 28.4

Remarque 28.4. On dit qu'une surface de l'espace est *fermée* lorsqu'elle délimite un intérieur et un extérieur. Par exemple une sphère ou un ellipsoïde sont des surfaces fermées ; par contre un plan n'en est pas une. Par convention, *une surface fermée sera toujours orientée vers l'extérieur*, c'est-à-dire que son vecteur normal unitaire sera toujours dirigée vers l'extérieur. Ainsi la sphère de centre O de rayon R sera orientée par le vecteur normal unitaire :

$$\boxed{\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|} = \frac{1}{R}\left(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\right)}$$

28.2.3. Lignes de champs et surfaces équipotentielles

Soit $\overrightarrow{E}$ un champ de vecteurs. On appelle *ligne de champ* toute courbe (L) telle que, en tout point M de $(L),$ le champ $\overrightarrow{E}$ au point M est tangent à $(L).$

Par exemple, si $\overrightarrow{E} = -g\,\overrightarrow{k}$ est le champ de pesanteur au voisinage du sol, les

lignes de champ sont les droites verticales (figure 28.5 page suivante).
Si $\overrightarrow{E} = \frac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ est un champ newtonien d'origine O, les lignes de champ sont les droites passant par O (figure 28.6 page suivante).

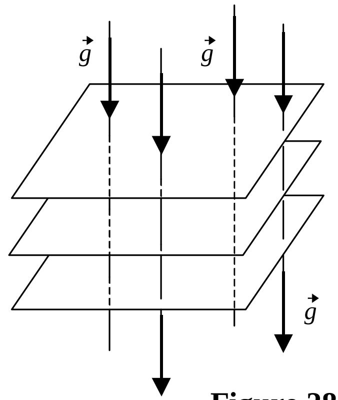


Figure 28.5

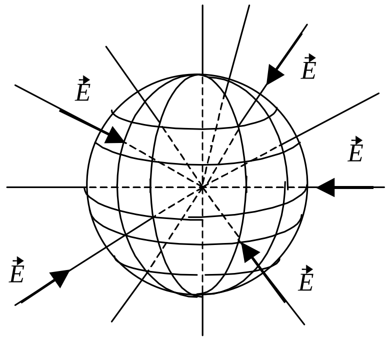


Figure 28.6

Supposons maintenant que le champ $\overrightarrow{E}$ dérive d'un potentiel scalaire V ; alors $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$. On appelle *surface équipotentielle* toute surface où les points sont au même potentiel, c'est-à-dire d'équation $V = C$, où C est une constante donnée.

Exemple 28.6. Soit $\overrightarrow{E} = -g\overrightarrow{k}$ le champ de pesanteur au voisinage du sol. On sait que $\overrightarrow{E}$ dérive du potentiel scalaire $V = gz$. Donc une surface équipotentielle a pour équation $gz = C$, c'est-à-dire $z = \frac{C}{g}$. Les surfaces équipotentielles sont donc les plans horizontaux z = constante (figure 28.5).

Exemple 28.7. Soit $\overrightarrow{E} = \frac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ un champ newtonien d'origine O. Il dérive du potentiel scalaire $V = \frac{k}{r}$. Les surfaces équipotentielles ont pour équation $\frac{k}{r} = C$, c'est-à-dire $r = \frac{k}{C}$. Ce sont les sphères d'équations r = constante (figure 28.6).

Dans les deux cas particuliers représentés figures 28.5 et 28.6, on constate que *lignes de champ et surfaces équipotentielles se coupent à angle droit.* Ceci est un résultat général, puisqu'un vecteur normal à la surface équipotentielle $V = C$ au point M est $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{\text{grad}}\ V = -\overrightarrow{E}$ (théorème 28.1). Ainsi le champ $\overrightarrow{E}$ est orthogonal à la surface équipotentielle au point M ; puisque $\overrightarrow{E}$ est tangent à la ligne de champ, celle-ci coupe la surface équipotentielle à angle droit.

28.2.4. Intégrales de surface

Une *intégrale de surface* est une intégrale de la forme :

$$\boxed{I = \iint_{\Sigma} f(M)d\sigma} \quad (28.10)$$

Ici Σ désigne une surface de l'espace, le point M décrit Σ, f est une fonction de M, et $d\sigma$ est un morceau infinitésimal de surface entourant le point M. On notera que les intégrales doubles étudiées dans le chapitre 26 sont des cas particuliers d'intégrales de surface : dans ce cas Σ est une surface plane du plan *Oxy*.

Pour calculer l'intégrale de surface (28.10), on choisit une représentation paramétrique de Σ. On obtient $d\sigma$ en faisant varier les deux paramètres de façon infinitésimale. On se ramène alors à un calcul d'intégrale double.

Exemple 28.8. Calculer $I = \iint_\Sigma z^2 d\sigma$, où Σ est la sphère de centre O de rayon R.

On utilise le paramétrage de la sphère donné par (28.9). Pour obtenir $d\sigma$, faisons varier θ de $d\theta$ et φ de $d\varphi$ (figure 28.2). On obtient à la surface de Σ un rectangle infinitésimal d'aire $d\sigma$. Ce rectangle a pour longueur $Rd\theta$ et pour largeur $R\sin\theta d\varphi$ (voir le calcul de dV en coordonnées sphériques, section 27.4). Donc :

$$\boxed{d\sigma = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi} \tag{28.11}$$

Pour décrire Σ, θ varie entre 0 et π et φ varie entre 0 et 2π. D'où :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}(R\cos\theta)^2 R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = R^4 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \\ &= R^4\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi \times [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi R^4. \end{aligned}$$

28.3. Flux d'un champ de vecteurs

Soit $\vec{E}$ un champ de vecteurs et (Σ) une surface de l'espace (figure 28.7). On désire *mesurer la quantité de champ qui traverse la surface* (Σ). Pour cela, on commence par orienter cette surface (de manière arbitraire) grâce à un vecteur normal unitaire $\vec{n}$. On prend ensuite en compte l'angle formé, localement au point M, entre le champ $\vec{E}$ et $\vec{n}$. La quantité de champ qui traverse (Σ) sera d'autant plus grande que cet angle sera petit, c'est-à-dire que le produit scalaire $\vec{E}.\vec{n}$ sera plus grand. On définit donc le *flux infinitésimal* qui traverse la surface $d\sigma$ au point M par :

$$d\phi = \vec{E}.\vec{n}d\sigma \tag{28.12}$$

Le *flux du champ* $\vec{E}$ *à travers la surface orientée* (Σ) sera donc défini par l'intégrale de surface :

$$\boxed{\phi = \iint_\Sigma \vec{E}.\vec{n}d\sigma} \tag{28.13}$$

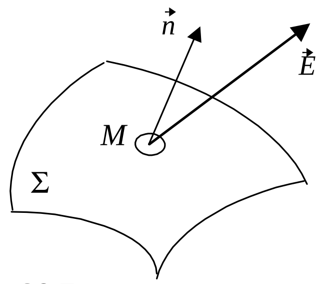


Figure 28.7

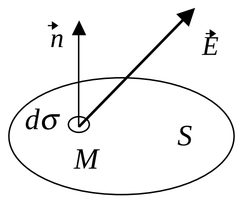


Figure 28.8

Exemple 28.9. Soit $\overrightarrow{E}$ un champ constant. Posons $E = \left\| \overrightarrow{E} \right\|$. Soit (Σ) une surface plane orientée (figure 28.8) d'aire S. Alors le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}$ à (Σ) forme avec $\overrightarrow{E}$ un angle α indépendant de M. Le flux de E à travers (Σ) vaut :

$$\phi = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{E} \,.\, \overrightarrow{n} d\sigma = \iint_{\Sigma} \left\| \overrightarrow{E} \right\| . \left\| \overrightarrow{n} \right\| \cos \alpha d\sigma.$$

Puisque $\left\| \overrightarrow{n} \right\| = 1$, il vient :

$$\boxed{\phi = E \cos \alpha \iint_{\Sigma} d\sigma = ES \cos \alpha} \qquad (28.14)$$

Dans le cas où la surface (Σ) tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe orthogonal à $\overrightarrow{E}$, on a $\alpha = \omega t$ puisque $\overrightarrow{E}$ est constant et le flux qui traverse (Σ) est *sinusoïdal*, de la forme $\phi = ES \cos \omega t$.

Remarque 28.5. Le calcul du flux d'un champ newtonien est plus difficile et conduira à la notion d'angle solide, que nous développerons dans la section 28.5.

28.4. Formules de Stokes et d'Ostrogradski

28.4.1. Expression intrinsèque de la divergence

Nous avons défini la divergence d'un champ à partir de l'opérateur nabla. Cette définition n'est pas intrinsèque, puisqu'elle se fait à partir des coordonnées cartésiennes x, y, z. La *définition intrinsèque* de la divergence utilise la notion de flux et s'énonce ainsi : soit dV un volume infinitésimal entourant le point M ; orientons la surface infinitésimale dS qui délimite dV vers l'extérieur (surface fermée). Alors le flux du champ $\overrightarrow{E}$ à travers dS vaut :

$$\boxed{d\phi = \operatorname{div} \overrightarrow{E} \,.\, dV} \qquad (28.15)$$

Ainsi la divergence mesure-t-elle la quantité de champ qui sort localement (diverge) du point M.

Exemple 28.10. Retrouvons à partir de l'expression intrinsèque $d\phi = \operatorname{div} \overrightarrow{E} \,.\, dV$ l'expression (28.3) de la divergence en coordonnées cartésiennes. Nous considérons au point $M(x, y, z)$ le volume infinitésimal dV limité par les plans d'abscisses x et $x + dx$, y et $y + dy$, z et $z + dz$ (figure 28.10).

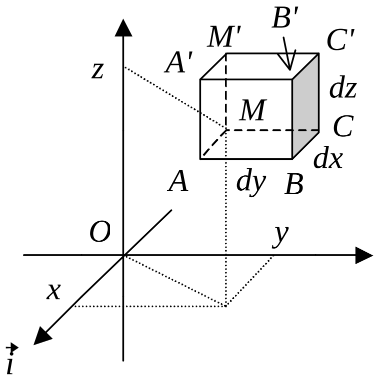


Figure 28.10

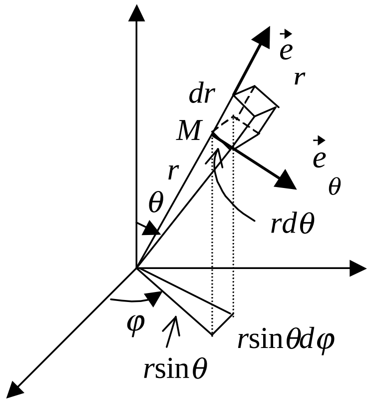


Figure 28.11

On a $dV = dxdydz$ et le vecteur normal à la face $ABB'A'$ est $\vec{i}$; cette face a pour aire $dydz$. Puisque tous les points de cette face ont pour abscisse $x + dx$, le flux $d\phi_1$ à travers $ABB'A'$ vaut $d\phi_1 = \vec{E}.\vec{i}.dydz = E_x(x + dx, y, z)dydz$.
De même, le vecteur normal à $MCC'M'$ est $-\vec{i}$, et le flux $d\phi_2$ à travers $MCC'M'$ vaut $d\phi_2 = -\vec{E}.\vec{i}.dydz = -E_x(x, y, z)dydz$. Donc le flux infinitésimal à y et z constants vaut :

$$d\phi_{y,z} = d\phi_1 + d\phi_2 = [E_x(x + dx, y, z) - E_x(x, y, z)]dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x}dxdydz.$$

En procédant de même pour les quatre autres faces de dV, on voit que le flux sortant de dV a pour valeur :

$$d\phi = d\phi_{y,z} + d\phi_{x,z} + d\phi_{x,y} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dxdydz.$$

En remplaçant dans (28.15) et en divisant par $dxdydz$, on obtient bien :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{dx} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Exemple 28.11. Calculons l'expression de la divergence en coordonnées sphériques. On connaît alors $\vec{E}$ dans la base orthonormale directe $\left(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi}\right)$: $\vec{E} = E_r\vec{e_r} + E_\theta\vec{e_\theta} + E_\varphi\vec{e_\varphi}$. Le volume dV (figure 28.11) est le volume habituel des coordonnées sphériques et vaut $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$. La face qui a pour vecteur normal $-\vec{e_r}$ a pour aire $r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ et le flux correspondant vaut :

$$d\phi_1 = -E_r(r, \theta, \varphi)r^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Quand on augmente r de dr, le flux sortant à travers la face de vecteur normal $\vec{e_r}$ vaut $d\phi_2 = E_r(r + dr, \theta, \varphi)(r + dr)^2 \sin\theta d\theta d\varphi$.
Donc le flux sortant à θ et φ constants a pour expression :

$$d\phi_{\theta,\varphi} = d\phi_1 + d\phi_2 = \left[E_r(r+dr,\theta,\varphi)(r+dr)^2 - E_r(r,\theta,\varphi)r^2\right]\sin\theta d\theta d\varphi$$
$$= \frac{\partial}{\partial r}(r^2E_r)\sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

En raisonnant de même pour les autres faces, on voit que le flux total sortant du volume dV vaut :

$$d\phi = d\phi_{\theta,\varphi} + d\phi_{r,\varphi} + d\phi_{r,\theta}$$
$$= \frac{\partial}{\partial r}(r^2E_r)\sin\theta dr d\theta d\varphi + \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta) r dr d\theta d\varphi + \frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} r dr d\theta d\varphi.$$

En remplaçant dans (28.15) et en divisant par $r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$, on obtient l'expression de la *divergence en coordonnées sphériques* :

$$\boxed{\operatorname{div}\overrightarrow{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}} \qquad (28.16)$$

Remarque 28.6. Le calcul de la divergence du champ newtonien, effectué en coordonnées cartésiennes dans l'exemple 28.1, est évidemment beaucoup plus simple en coordonnées sphériques. Dans ce cas en effet, $E_r = \frac{k}{r^2}$, $E_\theta = 0$ et $E_\varphi = 0$. Ainsi $r^2E_r = k =$ constante, de telle sorte que div $\overrightarrow{E} = 0$ par (28.16).

28.4.2. Expression intrinsèque du rotationnel

La *définition intrinsèque du rotationnel* utilise également la notion de flux ; soit une courbe fermée (C) orientée infinitésimale entourant le point M ; orientons la surface infinitésimale dS délimitée par (C) par la règle du tire-bouchon (figure 28.12). Alors la circulation δW du champ $\overrightarrow{E}$ le long de (C) vaut :

$$\boxed{\delta W = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}\,.\,\overrightarrow{n}\,.\,dS} \qquad (28.17)$$

Ainsi δW est égale au flux du rotationnel de $\overrightarrow{E}$ à travers dS. Le mot *rotationnel* vient de ce qu'on fait circuler (tourner) le champ localement autour de M.

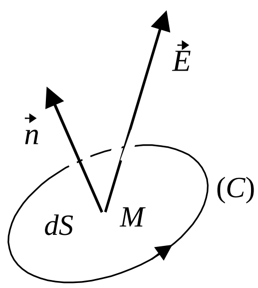


Figure 28.12

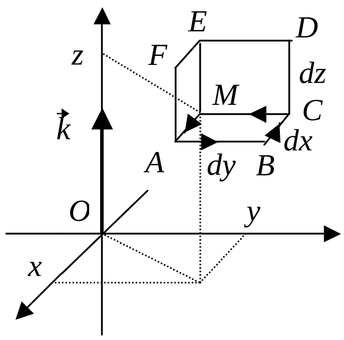


Figure 28.13

Exemple 28.12. Retrouvons l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes à partir de l'expression intrinsèque (28.17). Pour cela, examinons où $\sum q_{int}$ désigne la somme des charges intérieures à (Σ). Cet énoncé est le *théorème de Gauss*. Il permet de calculer le champ électrostatique créé par des distributions de charges simples.

EXERCICES DU CHAPITRE 28

Les basiques

Exercice 28.1 (A) : Calculer le rotationnel du champ newtonien $\overrightarrow{E} = \frac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$.

Exercice 28.2 (A) : Démontrer que $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, U\right) = \overrightarrow{0}$ et $\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}\right) = 0$.

Exercice 28.3 (A) : Démontrer les formules suivantes :

1) $\text{div}\left(\lambda\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{E}.\overrightarrow{\text{grad}}\,\lambda + \lambda\text{div}\,\overrightarrow{E}$.

2) $\text{div}\left(\overrightarrow{E}\wedge F\right) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} - \overrightarrow{E}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F}$.

Exercice 28.4 (A) : Transformer les vecteurs suivants :

$$1)\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\lambda\overrightarrow{E}\right) \quad ; \quad 2)\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}\right).$$

Exercice 28.5 (A) : Soit $\overrightarrow{\omega}$ un vecteur constant, et soit $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$.
Démontrer que $\overrightarrow{\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}$.

Exercice 28.6 (B) : Soit $R > 0$. Calculer l'intégrale de surface $I = \iint_S f(M)d\sigma$, où $f(M) = f(x,y,z) = \sqrt{z}$, et S est la demi-sphère d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad , \quad z \geq 0.$$

Exercice 28.7 (B) : Soit $R > 0$ et $a > 0$. Calculer l'intégrale de surface :

$$I = \iint_S f(M)d\sigma,$$

où $f(M) = f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}$, et S est le cylindre d'équation :

$$x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq a.$$

Exercice 28.8 (C) : Soit $R > 0$ et $h > 0$. Soit la portion Σ de cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2,\ \ 0 \leq z \leq h,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0$. Déterminer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{E} = z\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} - 3y^2z\,\overrightarrow{k}$ à travers Σ (on précisera l'orientation choisie).

Exercice 28.9 (A,C,E) : Soit $R > 0$, et soit S la demi-sphère d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad , \quad z \geq 0.$$

On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{E} = y\,\overrightarrow{i} + x(1-2z)\,\overrightarrow{j} - xy\,\overrightarrow{k}$.

1) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{E}$. En déduire le flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{E}$ à travers S (on précisera l'orientation choisie).

2) Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Stokes.

3) Retrouver ce résultat en fermant la surface S par le disque de centre O de rayon R situé dans le plan Oxy, et en utilisant la formule d'Ostrogradski.

Exercice 28.10 (C,D,E) : Soit $R > 0$, et soit S la demi-sphère d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad , \quad z \geq 0.$$

En utilisant la formule d'Ostrogradski, trouver le flux du champ constant $\overrightarrow{E} = E\,\overrightarrow{k}$ à travers S (on précisera l'orientation de S choisie).

Exercice 28.11 (C,D,F) : Soit $R > 0$ et $a > 0$. Soit D le disque de la figure 28.22.

1) Calculer l'angle solide sous lequel on voit ce disque depuis le point O.

2) Calculer le flux du champ newtonien $\overrightarrow{E} = \frac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ à travers D, orienté dans le sens des y croissants.

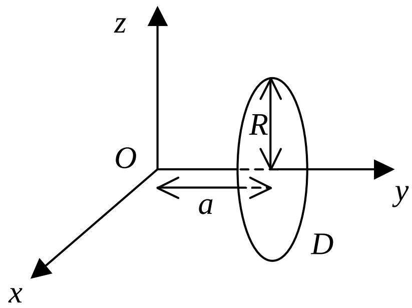


Figure 28.22

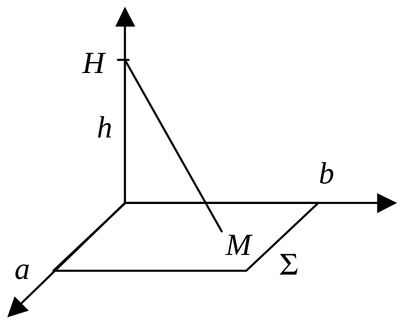


Figure 28.23

Exercice 28.12 (A,C,E) : On se propose de calculer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{E} = xy^2\,\overrightarrow{i}$ à travers la surface de la sphère (S) de rayon R orientée vers l'extérieur, de deux manières différentes.

1) *Calcul direct.*

a) Calculer les intégrales

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi \quad ; \quad J = \int_0^{\pi} \sin^5\theta\, d\theta.$$

b) Soit $M(x,y,z)$ un point de la surface (S). Montrer que le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}$ à (S) au point M vaut $\overrightarrow{n} = \frac{1}{R}\left(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\right)$.

c) Calculer $\overrightarrow{E}\,.\,\overrightarrow{n}$, puis le flux ϕ du champ $\overrightarrow{E}$ à travers (S).

2) *Calcul par la formule d'Ostrogradski.*

a) Calculer $\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}$.

b) Calculer l'intégrale triple $\iiint_{(\Sigma)} \mathrm{div}\,\overrightarrow{E}\,.\,dV$, où (Σ) désigne le volume intérieur à (S). En déduire ϕ.

Or l'intégrale triple correspond au volume (ordinaire) intérieur à la sphère Σ_x. Donc :

$$V = \int_{x=-R}^{x=R} \frac{4}{3}\pi\rho^3 dx = \frac{4}{3}\pi\int_{x=-R}^{x=R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^3 dx = \frac{8}{3}\pi\int_{x=0}^{x=R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^3 dx.$$

On peut calculer cette intégrale grâce au changement de variable $x = R\sin\theta$. Il vient :

$$V = \frac{8}{3}\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta.$$

Cette dernière intégrale se calcule par linéarisation :

$$\begin{aligned}\cos^4\theta &= \frac{1}{16}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^4 = \frac{1}{16}(e^{4i\theta}+4e^{2i\theta}+6+4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta})\\ &= \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3).\end{aligned}$$

Il vient finalement $V = \dfrac{\pi^2}{2}R^4$.

Solutions des exercices du chapitre 28

Exercice 28.1 : On a $\overrightarrow{E} = k\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3} = k(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\left(x\,\overrightarrow{i}+y\,\overrightarrow{j}+z\,\overrightarrow{k}\right).$

Donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\\ y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\\ z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z\dfrac{\partial}{\partial y}\left[(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right] - y\dfrac{\partial}{\partial z}\left[(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\\ x\dfrac{\partial}{\partial z}\left[(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right] - z\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\\ y\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right] - x\dfrac{\partial}{\partial y}\left[(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3zy(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3yz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\\ -3xz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3zx(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\\ -3yx(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3xy(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Exercice 28.2 : 1) $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,U\right) = \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{\text{grad}}\,U = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\dfrac{\partial U}{\partial x}\\ \dfrac{\partial U}{\partial y}\\ \dfrac{\partial U}{\partial z}\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ car } \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \ldots \text{ (formule (8.34)).}$$

2) $\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}\right) = \vec{\nabla}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \left[\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \right]$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial y} = 0 \text{ (formule (8.34)).}$$

Exercice 28.3 : 1) $\text{div}\left(\lambda\vec{E}\right) = \vec{\nabla}.\left(\lambda\vec{E}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda E_x \\ \lambda E_y \\ \lambda E_z \end{pmatrix}$

$= \dfrac{\partial}{\partial x}(\lambda E_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\lambda E_y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\lambda E_z)$. Par la règle de dérivation d'un produit :

$$\text{div}\left(\lambda\vec{E}\right) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} E_x + \lambda \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} E_y + \lambda \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} E_z + \lambda \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$= \lambda\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x} E_x + \frac{\partial \lambda}{\partial y} E_y + \frac{\partial \lambda}{\partial z} E_z = \lambda\left(\text{div}\,\vec{E}\right) + \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\lambda\right).\vec{E}.$$

2) $\text{div}\left(\vec{E} \wedge \vec{F}\right) = \vec{\nabla}.\left(\vec{E} \wedge \vec{F}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \left[\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \right]$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} E_y F_z - E_z F_y \\ E_z F_x - E_x F_z \\ E_x F_y - E_y F_x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(E_y F_z - E_z F_y) + \frac{\partial}{\partial y}(E_z F_x - E_x F_z) + \frac{\partial}{\partial z}(E_x F_y - E_y F_x)$$

En utilisant de nouveau la règle de dérivation d'un produit, il vient :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{F}\right) &= \frac{\partial E_y}{\partial x}F_z + E_y\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial x}F_y - E_z\frac{\partial F_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial y}F_x + E_z\frac{\partial F_x}{\partial y}\\ &\quad - \frac{\partial E_x}{\partial y}F_z - E_x\frac{\partial F_z}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial z}F_y + E_x\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial E_y}{\partial z}F_x - E_y\frac{\partial F_x}{\partial z}\\ &= -E_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - E_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) - E_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\\ &\quad + F_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + F_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + F_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

On reconnaît alors des produits scalaires :
div

$$\left(\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{F}\right) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$= \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} - \overrightarrow{E}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F}.$

<u>Exercice 28.4</u> : 1) $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\lambda\overrightarrow{E}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(\lambda E_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\lambda E_y) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\lambda E_x) - \frac{\partial}{\partial x}(\lambda E_z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\lambda E_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\lambda E_x) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial y}E_z + \lambda\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial\lambda}{\partial z}E_y - \lambda\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial z}E_x + \lambda\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}E_z - \lambda\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial x}E_y + \lambda\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial\lambda}{\partial y}E_x - \lambda\frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial y}E_z - \frac{\partial\lambda}{\partial z}E_y \\ \frac{\partial\lambda}{\partial z}E_x - \frac{\partial\lambda}{\partial x}E_z \\ \frac{\partial\lambda}{\partial x}E_y - \frac{\partial\lambda}{\partial y}E_x \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \lambda.\overrightarrow{\text{rot}}$$

$\overrightarrow{E}.$

On a donc finalement :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\lambda\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\,\lambda \wedge E + \lambda.\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}.$$

2) $$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} - \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial z} - \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} \end{pmatrix}$$. Faisons apparaître des laplaciens :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\text{div}\,\vec{E}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\text{div}\,\vec{E}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\text{div}\,\vec{E}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}.$$

Exercice 28.5 : Posons $\vec{\omega} = \omega_x\,\vec{i} + \omega_y\,\vec{j} + \omega_z\,\vec{k}$, où ω_x, ω_y et ω_z sont des constantes.

Alors $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\left[\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}(\omega_x y - \omega_y x) - \dfrac{\partial}{\partial z}(\omega_z x - \omega_x z) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(\omega_y z - \omega_z y) - \dfrac{\partial}{\partial x}(\omega_x y - \omega_y x) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(\omega_z x - \omega_x z) - \dfrac{\partial}{\partial y}(\omega_y z - \omega_z y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x - (-\omega_x) \\ \omega_y - (-\omega_y) \\ \omega_z - (-\omega_z) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$