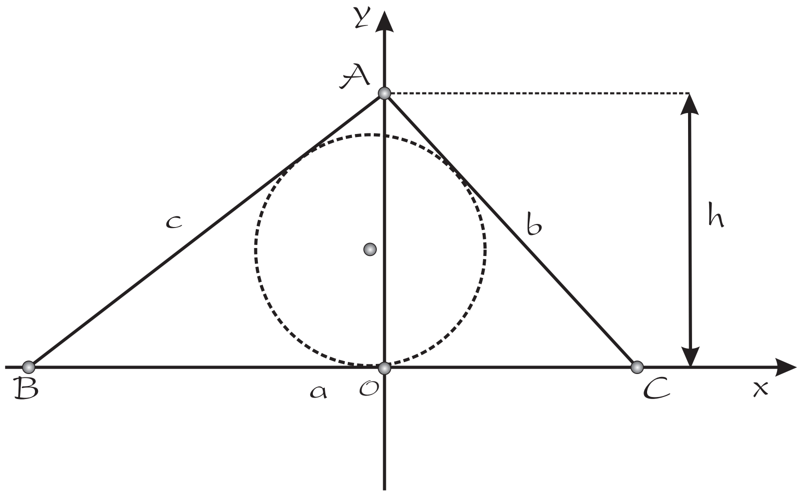
Le théorème des cercles inscrits égaux par la trigonométrie hyperbolique.

Huvent Géry

24 août 2009

1 Calcul du rayon du cercle inscrit

Soit ABC un triangle, on sait que le rayon du cercle inscrit vaut $r = \dfrac{\mathcal{A}}{p}$ où $\mathcal{A}$ est l'aire de ABC et p son demi-périmètre. Si h désigne la hauteur issue de A et a, b, c les longueurs des côtés opposés à A, B et C, on a $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} ha$ et $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$. On va se placer dans le repère où l'axe des ordonnées est porté par (BC) et où A a pour coordonées $(0, h)$, et l'on note x_B, x_C les abscisses de B et C.



Pour calculer r, on pose

$$x_B = h \operatorname{sh}(t) \text{ et } x_C = h \operatorname{sh}(u)$$

avec sh la fonction sinus hyperbolique. Pour être précis, on a $t = \operatorname{arg\,sh}\left(\dfrac{x_B}{h}\right)$ et $u = \operatorname{arg\,sh}\left(\dfrac{x_C}{h}\right)$. Ainsi

$$\begin{aligned} a &= h(\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} t) = 2h \operatorname{sh}\left(\frac{t-u}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{t+u}{2}\right) \\ b &= \sqrt{h^2 + h^2 \operatorname{sh}^2 u} = h \operatorname{ch} u \text{ et } c = h \operatorname{ch} t \\ b + c &= h(\operatorname{ch} u + \operatorname{ch} t) = 2h \operatorname{ch}\left(\frac{t-u}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{t+u}{2}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} p &= h \operatorname{ch}\left(\frac{t+u}{2}\right) \times \left(\operatorname{ch}\left(\frac{t-u}{2}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{t-u}{2}\right)\right) = h \operatorname{ch}\left(\frac{t+u}{2}\right) \exp\left(\frac{t-u}{2}\right) \\ \mathcal{A} &= \frac{1}{2} ha = h^2 \operatorname{sh}\left(\frac{t-u}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{t+u}{2}\right) \end{aligned}$$

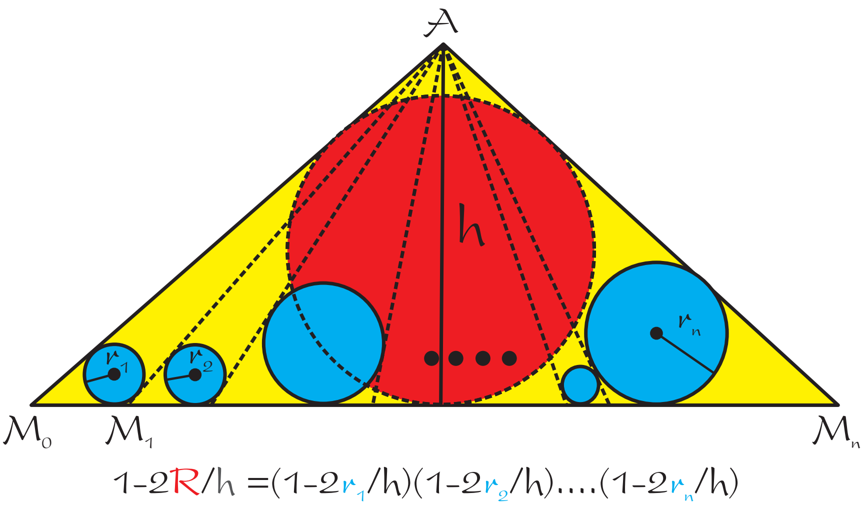
et

$$r = \frac{\mathcal{A}}{p} = h \operatorname{sh}\left(\frac{t-u}{2}\right) \exp\left(-\frac{t-u}{2}\right) = \frac{h}{2}\left(1 - e^{-(t-u)}\right)$$

que l'on écrit

$$1 - \frac{2r}{h} = e^{-(t-u)}$$

2 Un théorème classique du Wasan [1]

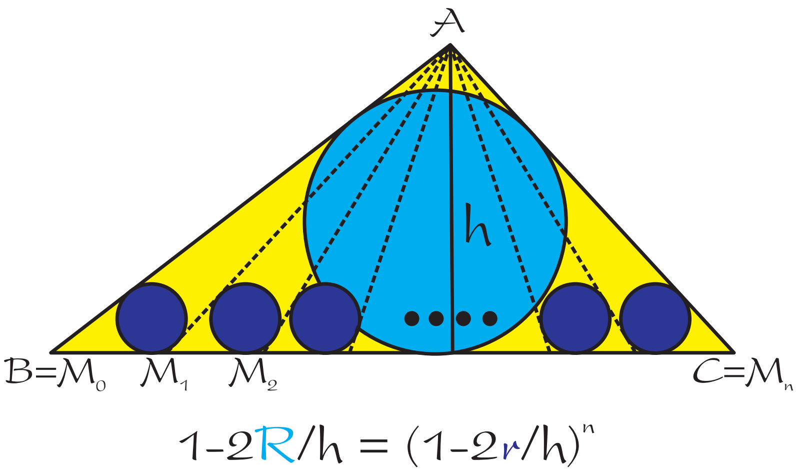


On considère un triangle ABC que l'on partage en n triangles $AM_{k-1}M_k$, $1 \leq k \leq n$ comme indiqué sur la figure. Soit r_k le rayon du cercle inscrit au triangle $AM_{k-1}M_k$, R le rayon du cercle inscrit à ABC et h la hauteur issue de A alors

$$1 - \frac{2R}{h} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{2r_k}{h}\right)$$

Théorème Principal : Si les rayons des cercles inscrits sont égaux, alors

$$1 - \frac{2R}{h} = \left(1 - \frac{2r}{h}\right)^n$$



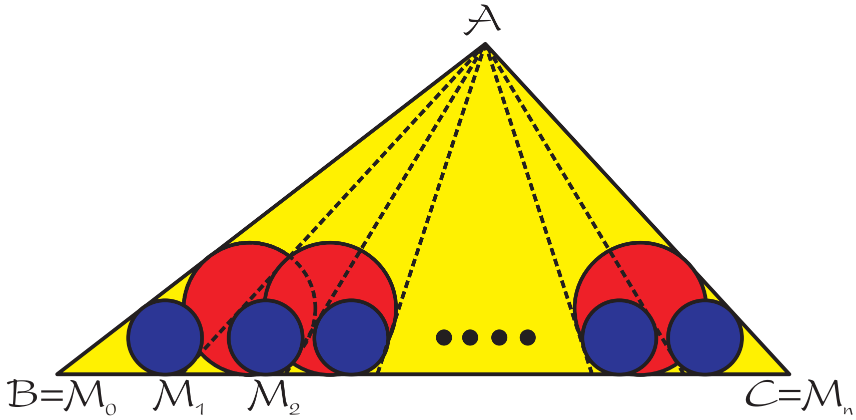
3 Le théorème des cercles inscrits

3.1 Le cas initial

On se place dans le cas où le l'on partage le triangle ABC en n triangles $AM_{k-1}M_k$, $1 \leq k \leq n$, de telle façon que les cerlces inscrits à ces n triangles aient tous même rayon. Le théorème des cercles inscrits affirme, tout d'abord, que les cercles

[1] Wasan : mathématiques traditionnelles japonaises.

inscrits dans les triangles construits par regroupement de deux triangles consécutifs ont également même rayon.



Ce résultat est immédiat en appliquant le théorème principal au triangle AM_kM_{k+2}. Soit r_2 le rayon de son cercle inscrit, il vérifie en effet l'égalité

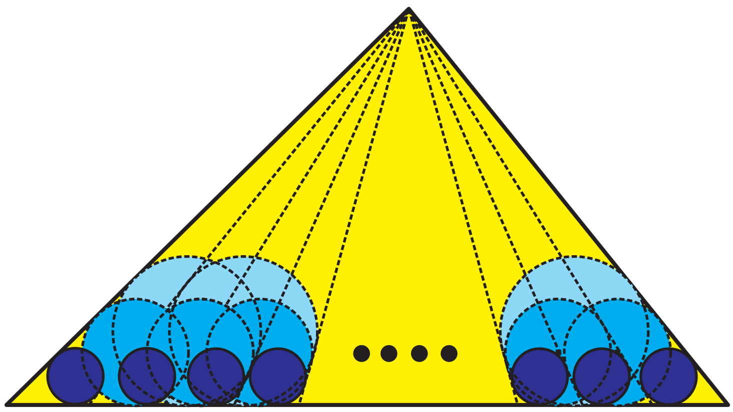
$$1-\frac{2r_2}{h}=\left(1-\frac{2r}{h}\right)^2$$

ce qui prouve qu'il est bien constant. On peut même préciser sa valeur, à savoir

$$r_2=2r\frac{h-r}{h}$$

3.2 Le cas général

Plus généralement, on montre que le rayon du cercle inscrit au triangle AM_iM_{i+k} est constant, ce qu'affirme le théorème des cercles inscrits égaux dans sa généralité.



Soit r_k ce rayon, en utilisant le théorème principal, par décomposition du triangle en k triangles, on a

$$1-\frac{2r_k}{h}=\left(1-\frac{2r}{h}\right)^k$$

Ce qui prouve qu'il est bien constant. On peut écrire d'une autre manière cette égalité, puisque $1-\dfrac{2r}{h}=\left(1-\dfrac{2R}{h}\right)^{\frac{1}{n}}$ on en déduit que

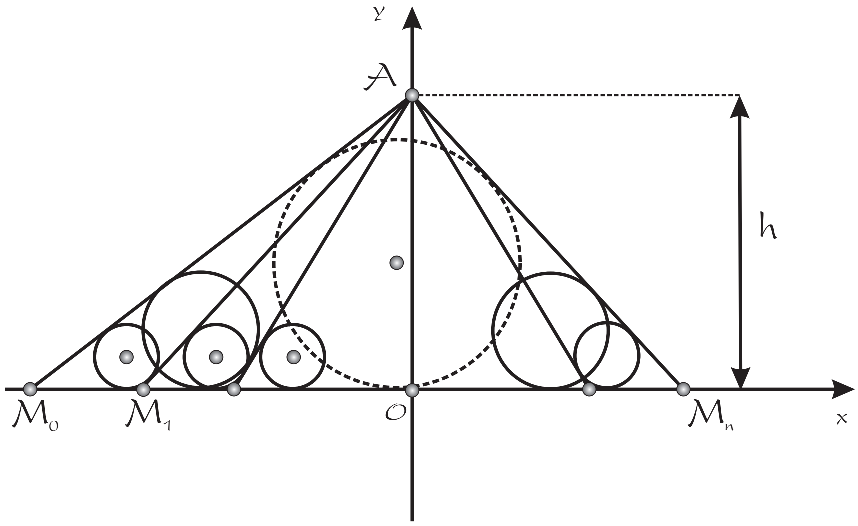
$$1-\frac{2r_k}{h}=\left(1-\frac{2R}{h}\right)^{\frac{k}{n}}$$

soit, avec $R=\dfrac{\mathcal{A}}{p}=\dfrac{ha}{2p}$

$$r_k=\frac{h}{2}\left(1-\left(1-\frac{a}{p}\right)^{\frac{k}{n}}\right)=\frac{\mathcal{A}}{a}\left(1-\left(1-\frac{a}{p}\right)^{\frac{k}{n}}\right)$$

3.3 Une suite arithmétique

La relation $1-\dfrac{2r_k}{h}=\left(1-\dfrac{2r}{h}\right)^k$ s'interprète facilement en posant $\left(1-\dfrac{2r}{h}\right)=e^{-\rho}$. Le réel ρ représente alors la raison d'une suite arithmétique. Pour comprendre ce résultat, on se place dans le même repère que celui utilisé pour démontrer le théorème principal. Soit x_k l'abscisse du point M_k, on pose $t_k=\operatorname{arg\,sh}\left(\dfrac{x_k}{h}\right)$.



On utilise le calcul du rayon du cercle inscrit pour chacun des n triangles triangles AM_kM_{k+1} (avec $0\leq k\leq n-1$), ce dernier étant constant, on en déduit que

$$1-\frac{2r}{h}=e^{-\rho}=e^{-(t_{k-1}-t_k)}\text{ est constant}$$

Cette égalité prouve que la suite $(t_k)_{0\leq k\leq n}$ est arithmétique de raison ρ.