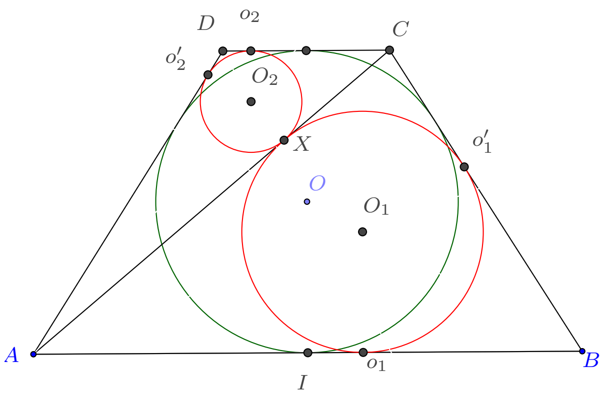
Sangaku 21

Jacques Vernin

8 juin 2017

Lisant l'excellent livre de Géry Huvent, je tente de donner une réponse au *Sangaku 21* qui demande – voir figure – de trouver une estimation de R en fonction de r_1 et r_2.



Propriété du trapèze isocèle inscriptible

La première remarque qui vient à l'esprit lorsqu'on dessine la figure est qu'*il semble* que les cercles (O_1) et (O_2) soient tangents entre eux, en un point X appartenant à AC

Cette propriété est indiquée par Géry Huvent, mais n'intervient pas dans le résultat. C'est pourtant une propriété curieuse, sur laquelle j'aimerais revenir.

Le trapèze isocèle de la figure n'est pas n'importe lequel : il est *inscriptible*, ce qui est une propriété importante. Dans ces trapèzes isocèles inscriptibles, on montre très facilement que :

— Je pose $AB = a$ et $CD = b$. Alors, il existe un théorème de Pitot [1], facile à montrer : $2AD = a + b$

— On montre également que $2R = \sqrt{a \times b}$

La tangence des deux cercles (O_1) et (O_2) se démontre dès lors facilement. L'aire du triangle ABC est Ra, son périmètre est $2p_1 = a + \frac{a+b}{2} + AC = \frac{3a+b}{2} + AC$; mais ce périmètre est également : $2p_1 = 2Ao_1 + 2Bo'_1 + 2Co'_1 = 2a + Co'_1$. On en tire :

$$2Co'_1 = AC - \frac{a-b}{2}$$

Le même raisonnement donne la même valeur pour Co_2 : les deux cercles (O_1) et (O_2) ont même point de tangence X sur AC

La relation cherchée

On a, facilement : $AC^2 = \frac{(a+b)^2}{4} + ab$. Dans le triangle ABC, on a facilement l'aire et le périmètre du triangle :

$$2S_1 = 2Ra = a\sqrt{ab}$$

$$2p_1 = a + \frac{a+b}{2} + \frac{\sqrt{(a+b)^2 + 4ab}}{2}$$

On en tire :

$$r_1 = \frac{2S_1}{2p_1} = \frac{2a\sqrt{ab}}{3a + b + \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}}$$

On obtient de même :

$$r_2 = \frac{2b\sqrt{ab}}{a + 3b + \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}}$$

Posons $\sigma = \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}$. Il vient alors :

$$\sigma = \frac{2a\sqrt{ab}}{r_1} - (3a + b) = \frac{2b\sqrt{ab}}{r_1} - (a + 3b)$$

On en déduit la relation suivante :

$$\frac{a}{r_1} - \frac{b}{r_2} = \frac{a-b}{2R} \tag{1}$$

1. Je renvoie à la littérature spécialisée : la vie de Pitot est un roman. Absolument rétif à l'école, il a tout appris tout seul, jusqu'à obtenir l'amitié et l'appui de Réaumur. Il est devenu, ensuite, dans les années seize cents et quelques constructeur de ponts, aménageurs de la côte languedocienne, proche collaborateur de Riquet.

On va maintenant obtenir une relation simple également en utilisant le fait que (O) et (O_1) sont homothétiques dans une homothétie de centre B, et que (O) et (O_2) sont homothétiques dans une homothétie de centre D. Ainsi :

$$Bo_1 = \frac{a}{2}\frac{r_1}{R}$$

$$Do_2 = \frac{b}{2}\frac{r_2}{R}$$

Et comme $BC = Bo_1 + Co_2 = \frac{a+b}{2}$, il vient :

$$R(a-b) = ar_1 - br_2 \tag{2}$$

Il suffit maintenant d'éliminer a et b à partir de (1) et (2). On a :

$$a(R-r_1) = b(R-r_2) \tag{3}$$

$$a\frac{2R-r_1}{r1} = b\frac{2R-r_2}{r2}$$

On en déduit donc :

$$\frac{a}{b} = \frac{R-r_2}{R-r_1} = \frac{2R-r_2}{2R-r_1}\frac{r_1}{r_2}$$

R est donc racine de l'équation du second degré : $2R^2 + 2R(r_1+r_2) + r_1r_2$, soit

$$2R = r_1 + r_2 \pm \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

Mais là, mystère. Une bonne figure montre que la plus grande racine donne bien R. Mais qu'est donc la plus petite racine, qui est bien entendu positive, puisque le théorème de Pythagore nous montre que $\sqrt{r_1^2 + r_2^2} < r_1 + r_2$