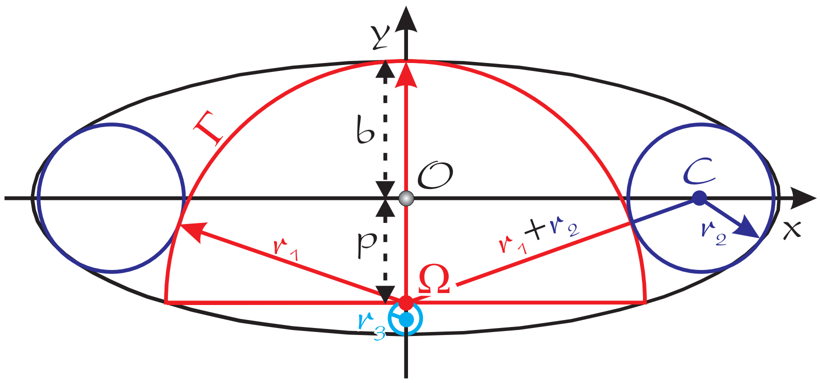
Son histoire

Un problème récent car daté de 1915. Le même problème serait cependant déjà mentionné en 1799. La tablette est encore exposée dans la ville de Yamagata éponyme de la préfecture. Elle mesure 70 *cm* de haut sur 187 *cm* de large. Une photo peut être consultée sur le site `http://www.wasan.jp` [?].

L'énigme On considère une ellipse de demi grand axe a et de demi petit axe b. Soit Γ un cercle de rayon r_1 centré sur l'axe secondaire passant par un des sommets secondaires de l'ellipse et coupant cette dernière selon un diamètre.



On considère alors les deux cercles de rayon r_2, centrés sur l'axe focal de l'ellipse, tangents à Γ et bitangents à l'ellipse. Enfin, r_3 désigne le rayon du cercle tangent à l'ellipse en l'autre sommet secondaire et au diamètre de Γ. On demande de prouver que

$$r_1 = 2r_2 + 6r_3$$

$\boxed{\text{Solution}}$ Les notations sont celles de la figure. On se place dans le repère où l'ellipse a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ et le diamètre du demi-cercle $y = -p$. Les points d'intersections du demi-cercle et de l'ellipse ont donc pour abscisse les x tels que

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - p^2\right)$$

Puisque le grand cercle coupe l'ellipse en un diamètre

$$r_1^2 = (b+p)^2 = x^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - p^2\right)$$

d'où

$$b + p = \frac{a^2}{b^2}(b-p) \Longrightarrow p = b\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

et ainsi

$$r_1 = b + p = \frac{2a^2 b}{a^2 + b^2}$$

Il est clair que

$$r_3 = \frac{2b - r_1}{2} = b - \frac{r_1}{2} = \frac{b^3}{a^2 + b^2}$$

Il reste à calculer r_2. On sait que $OC^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}\left(b^2 - r_2^2\right)$ (proposition **??** du mémento), et par application du théorème de Pythagore, puisque les cercles sont tangents

$$OC^2 + p^2 = (r_1 + r_2)^2$$

d'où, avec $p = r_1 - b$, $OC^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - b)^2$, soit

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2}\left(b^2 - r_2^2\right) = (b + r_2)(2r_1 + r_2 - b)$$

ce qui donne

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2}(b - r_2) = 2r_1 - (b - r_2) \Longrightarrow \frac{a^2}{b^2}(b - r_2) = 2r_1$$

Avec les valeurs trouvées pour r_1 et r_3, on obtient

$$b - r_2 = \frac{4b^3}{a^2 + b^2} = 4r_3 = 4b - 2r_1$$

ce qui s'écrit aussi

$$r_2 = 2r_1 - 3b$$

De $2(2r_1 - 3b) + 6\left(b - \dfrac{r_1}{2}\right) = r_1$ on en déduit alors que

$$\boxed{2r_2 + 6r_3 = r_1}$$

Remarque : On a $r_2 = b\frac{a^2-3b^2}{a^2+b^2}$, ce qui semble indiquer qu'il y a une condition sur l'ellipse pour que la configuration soit possible. En fait, le rayon d'un cercle centré sur l'axe focal et bitangent à l'ellipse, qui coupe ainsi l'ellipse en deux points doubles, est compris entre $\frac{b^2}{a}$ et b. On doit donc avoir $\frac{b^2}{a} \leq r_2 \leq b$. L'inégalité $\frac{b^2}{a} \leq r_2$ équivaut à $\frac{a^2-3b^2}{a^2+b^2} - \frac{b}{a} \geq 0$ soit après réduction au même dénominateur et simplification à $(a-b)^2 - 2b^2 \geq 0$. On doit ainsi avoir $\frac{a}{b} \geq 1 + \sqrt{2}$, l'autre inégalité $r_2 \leq b$ étant toujours vérifiée.