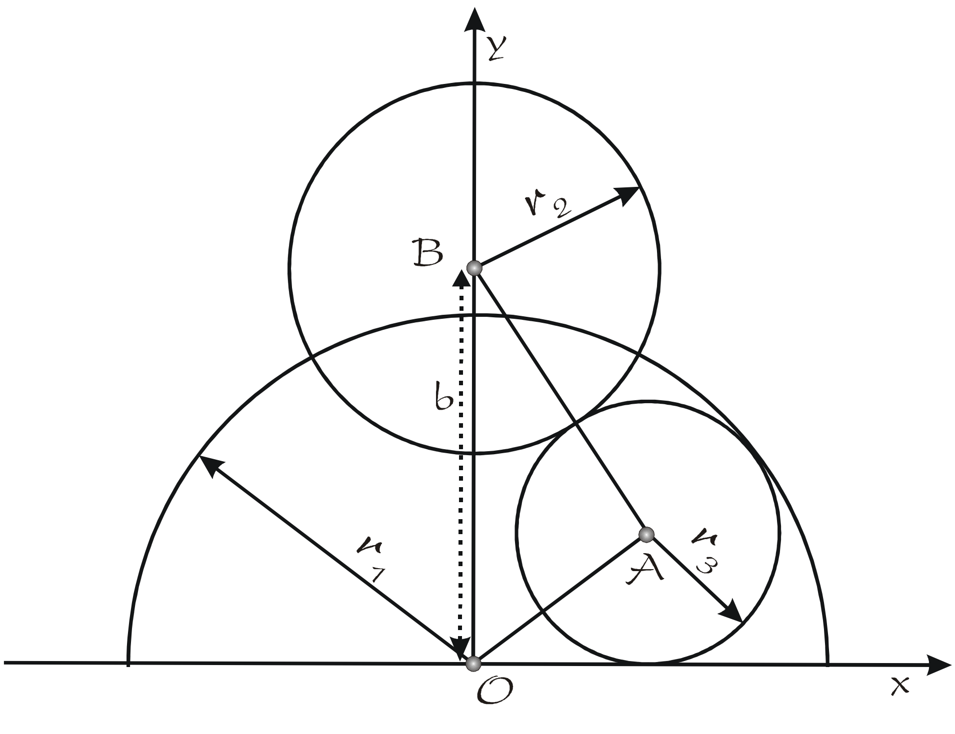
Quelques Sangaku

G.Huvent

19 avril 2006

1 Une figure de base



Dans la figure suivante on prend O comme origine du repère, on note r_1, r_2 et r_3 les rayons des cercles, (a, r_3) les coordonnées de A, $(0, b)$ les coordonnées de B. Les conditions de tangences donnent alors

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2+r_3^2}+r_3 &= r_1 \text{ : les cercles centrés en O et en A sont tangents} \\ \sqrt{a^2+(b-r_3)^2} &= r_2+r_3 \text{ : les cercles centrés en B et en A sont tangents} \end{aligned}$$

En éliminant a, on obtient alors les égalités

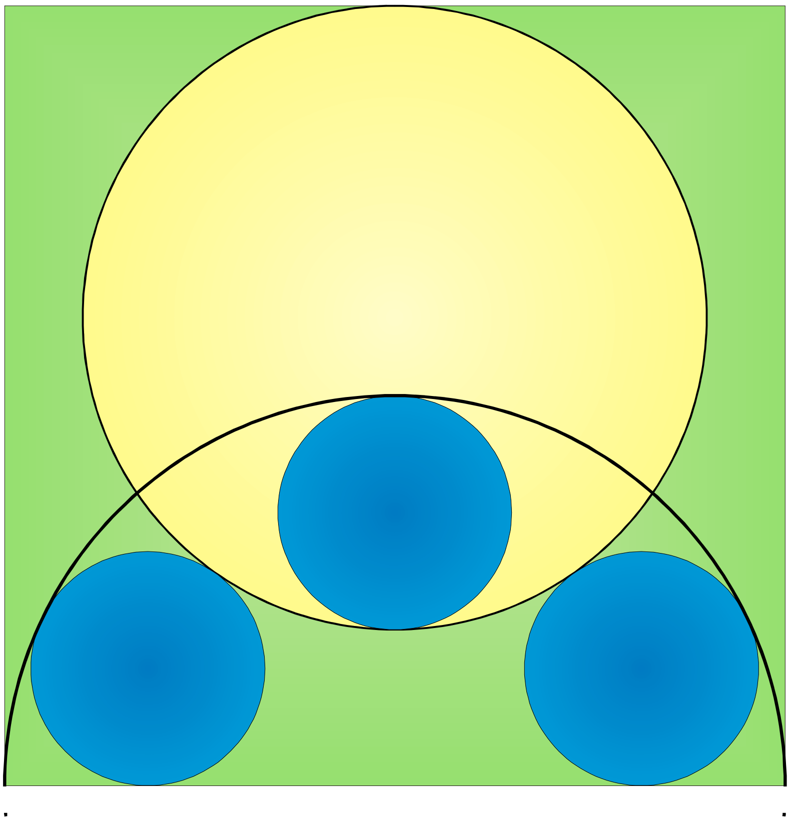
$$\left\{ \begin{array}{c} a^2=(r_1-r_3)^2-r_3^2=r_1(r_1-2r_3) \\ a^2=(b+r_2)(r_2+2r_3-b) \end{array} \right.$$

d'où l'égalité

$$r_1(r_1-2r_3)=(b+r_2)(r_2+2r_3-b) \qquad (\star)$$

A partir de cette relation, on peut prouver quelques "sangaku".

2 Un premier sangaku historique[1]



Dans le carré les trois cercles bleus ont même rayon r, si R est le rayon du cercle jaune, que vaut $\frac{R}{r}$?

On utilise l'égalité précédente. Le cercle inscrit dans le cercle jaune a pour diamètre $r_1 - (b - r_2) = r_1 + r_2 - b$, si les trois cercles bleus ont même rayon, on a donc

$$r_3 = \frac{r_1 + r_2 - b}{2} \iff 2r_3 - r_1 = r_2 - b$$

De plus, puisque l'on est dans un carré, on a

$$b + r_2 = 2r_1$$

Ainsi $(\star)$ donne

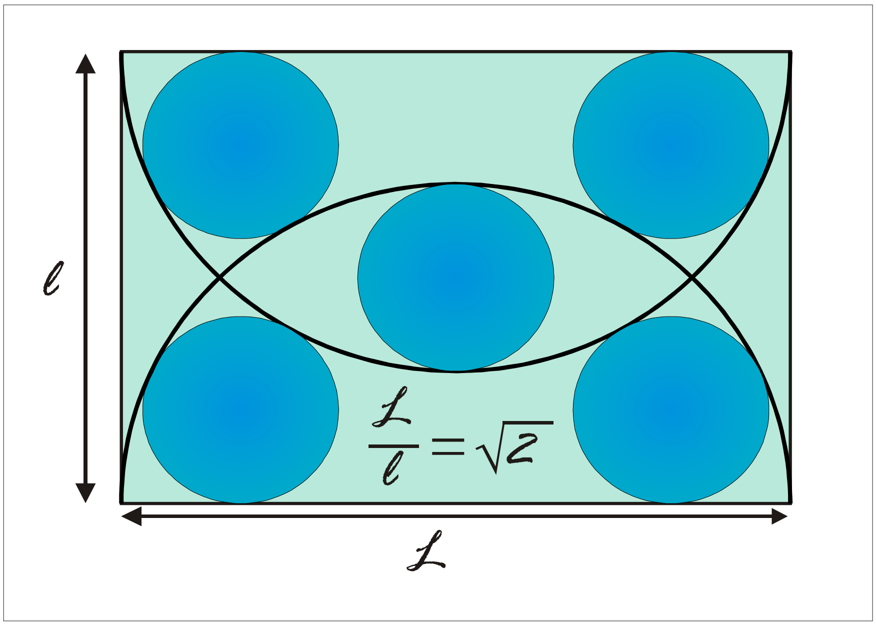
$$\begin{aligned} r_1 (r_1 - 2r_3) = (b + r_2)(r_2 + 2r_3 - b) &\iff r_1 (r_1 - 2r_3) = 2r_1 (r_2 + 2r_3 - b) \\ &\iff (r_1 - 2r_3) = 2(2r_3 + r_2 - b) \\ &\iff (r_1 - 2r_3) = 2(4r_3 - r_1) \\ &\iff \frac{r_1}{r_3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

puis $2r_2 = r_2 - b + b + r_2 = 2r_3 - r_1 + 2r_1 = 2r_3 + r_1$ d'où

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{4}{5} \text{ et } \frac{r_2}{r_3} = \frac{R}{r} = \frac{8}{3}$$

[1] Ce sangaku est encore exposé dans la ville d'Iwate (temple Chusonji). La tablette sur laquelle il fugure comporte quatre problèmes et mesure $1\mathrm{m}39$ sur $45\mathrm{cm}$. On peut en voir une image à l'adresse http ://www.wasan.jp/iwate/chusonji1.html.

3 L'oeil d'Horus



On demande de calculer le rapport $\frac{L}{l}$ des côtés du rectangle sachant que les quatre cercles ont même rayon. Ici encore, on utilise notre égalité, sachant que $r_1 = r_2$ et que l'oeil à un rayon égal à $r_3 = \dfrac{r_1 + r_2 - b}{2} = r_1 - \frac{b}{2}$. On obtient alors avec $(\star)$

$$r_1\left(r_1 - 2\left(r_1 - \frac{b}{2}\right)\right) = (b + r_1)\left(r_1 + 2\left(r_1 - \frac{b}{2}\right) - b\right) \Longleftrightarrow 2r_1^2 - b^2 = 0 \Longleftrightarrow b = \sqrt{2}r_1$$

d'où

$$\frac{L}{l} = \sqrt{2}$$