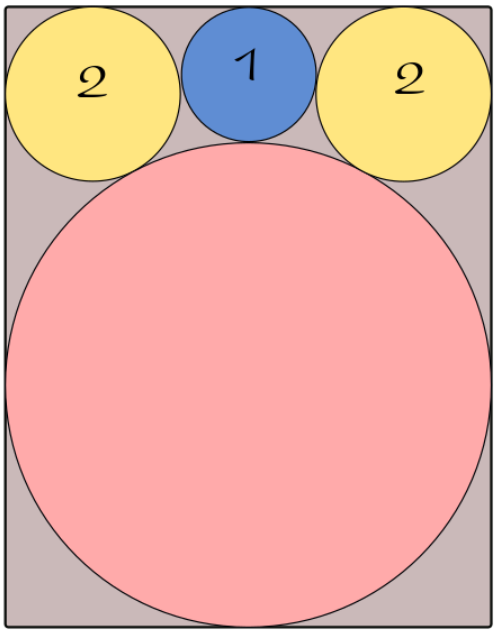
Variations autour d'un sangaku de @EratoSnail

Géry Huvent

11 février 2020

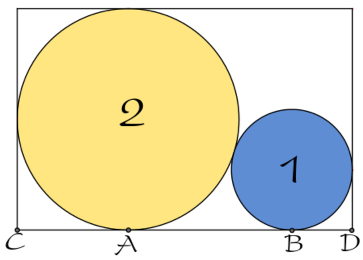
On se propose de donner une solution au sangaku suivant , création personnelle inspirée d'un sangaku proposé sur twitter par @EratoSnail.



$$\frac{1}{\sqrt{r_2 - r_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$

1 Un rappel

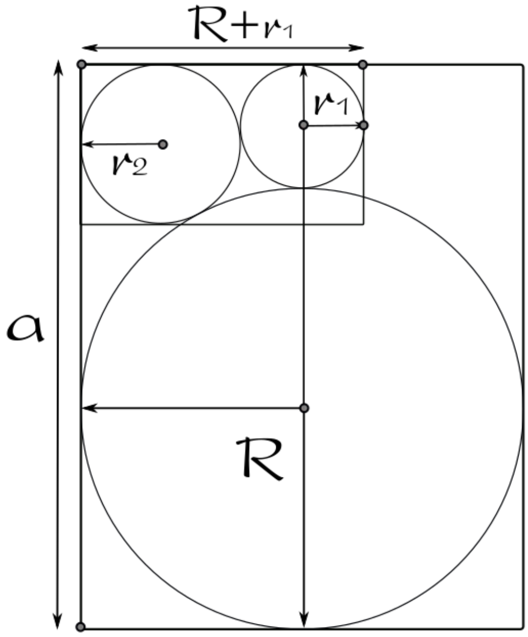
On utilisera le résultat suivant dont une preuve, simple application du théorème de Pythagore, est donnée dans [1].



$$AB = 2\sqrt{r_2 r_1}$$
$$CD = \left(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1}\right)^2$$

2 Solution du sangaku

Les notations sont celles de la figure suivante



2.1 Les deux relations de base

Avec les notations de la figure et le rappel donné, on a

$$a = \left(\sqrt{r_2} + \sqrt{R}\right)^2 \ , \ (R + r_1) = (\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1})^2 \text{ et } a = 2\,(R + r_1)$$

d'où

$$\begin{array}{ll} ① & 2\,(R + r_1) = \left(\sqrt{R} + \sqrt{r_2}\right)^2 = R + r_2 + 2\sqrt{R}\sqrt{r_2} \\ ② & (R + r_1) = (\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1})^2 \end{array}$$

De ①, on déduit que

$$\begin{aligned} R + 2r_1 - \sqrt{R}\sqrt{r_2} - r_2 &= 0 \\ \text{ce qui s'écrit } R + r_2 - 2\sqrt{R}\sqrt{r_2} &= 2\,(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

et donne

$$③ \qquad \left(\sqrt{R} - \sqrt{r_2}\right)^2 = 2\,(r_2 - r_1)$$

Puis ① et ③ conduisent à

$$\begin{aligned} (R - r_2)^2 &= \left(\sqrt{R} + \sqrt{r_2}\right)^2 \times \left(\sqrt{R} - \sqrt{r_2}\right)^2 \\ &= 2\,(R + r_1) \times 2\,(r_2 - r_1) \\ &= 4\,(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1})^2\,(r_2 - r_1) \text{ avec ②} \end{aligned}$$

d'où

$$④ \qquad R - r_2 = 2\,(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1})\,\sqrt{r_2 - r_1}$$

Enfin ② et ④ donnent

$$(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1})^2 = R + r_1 = (R - r_2) + r_2 + r_1 = 2\,(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1})\,\sqrt{r_2 - r_1} + r_2 + r_1$$

En développant, on obtient

$$2\sqrt{r_2}\sqrt{r_1} = 2\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_1}\right)\sqrt{r_2-r_1}$$

qui est équivalent à

$$\frac{1}{\sqrt{r_2-r_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

2.1.1 Une autre relation

De la relation précédente, on déduit que

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{2}{a}$$

En effet, on sait, d'après ① et ② que

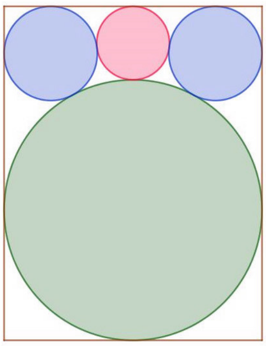
$$\frac{a}{2} = (R+r_1) = \left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_1}\right)^2 = r_1 + r_2 + \sqrt{r_1}\sqrt{r_2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} &= \frac{2}{a} \iff \frac{a}{2} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \iff r_1 + r_2 + \sqrt{r_1}\sqrt{r_2} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \\
&\iff \left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}\right)^2 = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \iff \sqrt{r_1}+\sqrt{r_2} = \frac{\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_2-r_1}} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{r_2-r_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \text{ ce que l'on vient de prouver.}
\end{aligned}$$

3 Le sangaku de @EratoSnail

Sur twitter, @EratoSnail a proposé le sangaku suivant



If the short side of the rectangle is 4 what is exact value of the red radius?

(the solution can and has to be simplified so it contains no fraction anymore)

3.1 Une solution

Il s'agit donc de calculer de manière exacte la valeur de r_1 en fonction de R. D'après ① et ②, on a

$$\sqrt{2}\sqrt{R+r_1} = \sqrt{r_2}+\sqrt{R} \text{ et } \sqrt{R+r_1} = \sqrt{r_2}+\sqrt{r_1}$$

d'où

$$\sqrt{r_2}+\sqrt{R} = \sqrt{2}\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_1}\right)$$

soit

$$\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{r_2} = \sqrt{R} - \sqrt{2}\sqrt{r_1}$$

en retranchant r_1 de chaque côté, on obtient

$$\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_1}\right) = \sqrt{R} - \sqrt{r_1}$$

et ainsi avec ①

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^2 \times (R+r_1) = \left(\sqrt{R}-\sqrt{r_1}\right)^2$$

On pose alors $x = \dfrac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{R}}$, ce qui donne

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^2 \left(x^2+1\right) = (1-x)^2$$

Cette dernière équation se normalise en

$$x^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)x + 1 = 0$$

On a deux racines positives dont l'une est plus grande que 1, l'autre plus petite (le produit des racines vaut 1). On ne retient que la plus petite, ce qui donne

$$x = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{R}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$$

Ainsi

$$r_1 = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\right)^2 R$$

Remarque 1 *On peut simplifier* $\sqrt{r_1}$ *en développant pour obtenir*

$$\frac{r_1}{R} = \sqrt{2} + \frac{1}{2} - \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$$

et en remarquant que $\left(1+\sqrt{2}\right)^2\left(2\sqrt{2}-1\right) = 5+4\sqrt{2}$, *obtenir*

$$\frac{r_1}{R} = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}+1-\sqrt{5+4\sqrt{2}}\right)$$

Avec $R=2$, on obtient $r_1 = 2\sqrt{2}+1-\sqrt{5+4\sqrt{2}}$, valeur demandée par @EratoSnail.

3.2 Complément et retour sur le premier sangaku

A partir de l'expression de r_1, le calcul de $\sqrt{r_2}$ est alors immédiat car

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{r_2} &= \sqrt{R}-\sqrt{2}\sqrt{r_1} = \sqrt{R}\left(1-\sqrt{2}x\right) \\
&= \sqrt{R}\left(1-\sqrt{2}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{r_2}{R} = 4+3\sqrt{2}-\left(3+2\sqrt{2}\right)\sqrt{2\sqrt{2}-1} = 4+3\sqrt{2}-\sqrt{31+22\sqrt{2}}$$

car $\left(3+2\sqrt{2}\right)^2\left(2\sqrt{2}-1\right) = 31+22\sqrt{2}$.

3.3 Expressions de R, r_1 et r_2 en fonction de a

Les expressions de R, r_1 et r_2 sont plus simples si on les donne en fonction de $a = 2R + 2r_1$. On obtient alors

$$a = 2R + 2\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} - \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right) R$$

d'où

$$R = \frac{1 + \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{4} a$$

puis

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 - \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{4} a \text{ (à comparer avec l'expression pour } R \text{)} \\ r_2 &= \frac{1 + 2\sqrt{2} - \left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{4} a \text{ et } \frac{1}{r_2} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{4} \frac{1}{a} \end{aligned}$$

3.4 Deux autres relations

On constate facilement que $r_1 R = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{4}} a^2$ et ainsi

$$\sqrt{r_1 R} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} a$$

On en déduit alors que

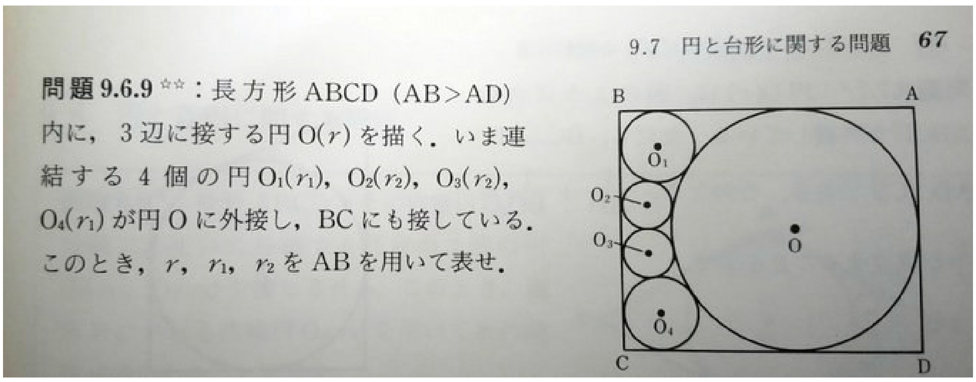
$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} - \frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$$

En effet, $\frac{1}{\sqrt{r_1}} - \frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{\sqrt{R} - \sqrt{r_1}}{\sqrt{R}\sqrt{r_1}} = \frac{\sqrt{a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{R}\sqrt{r_1}}$ d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r_1}} - \frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} &\iff \frac{\sqrt{a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{R}\sqrt{r_1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \\ &\iff \sqrt{R}\sqrt{r_1} = a\frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} a \end{aligned}$$

4 Le sangaku de Fukagawa

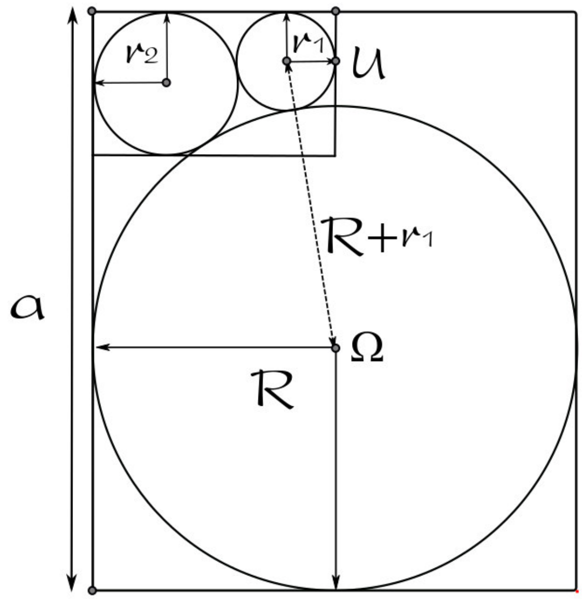
Suite à la question posée par @EratoSnail, j'ai proposé la variante suivante


9.7 円と台形に関する問題 67

問題 9.6.9 ☆☆：長方形 ABCD (AB>AD) 内に，3 辺に接する円 $O(r)$ を描く．いま連結する 4 個の円 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_2)$，$O_4(r_1)$ が円 O に外接し，BC にも接している．このとき，r，r_1，r_2 を AB を用いて表せ．

extrait du livre de Hidetoshi Fukagawa «Sankakkei en daen nado no kika mondai».

4.1 Une solution



En appliquant le rappel, on a

$$① \quad a = \left(\sqrt{R} + \sqrt{r_2}\right)^2 = R + 2\sqrt{Rr_2} + r_2$$

et $R = (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2$ que l'on écrit

$$② \quad \left(\sqrt{R} - \sqrt{r_2}\right)^2 = r_1$$

Par différence de ① et ②, on obtient

$$③ \quad 4\sqrt{R}\sqrt{r_2} = \left(\sqrt{R} + \sqrt{r_2}\right)^2 - \left(\sqrt{R} - \sqrt{r_2}\right)^2 = a - r_1$$

La distance ΩU étant égale à $\sqrt{(R + r_1)^2 - r_1^2}$, on en déduit que

$$a = R + \sqrt{(R + r_1)^2 - r_1^2} + r_1$$

On remplace cette expression de a dans ③ pour avoir $4\sqrt{R}\sqrt{r_2} = R + \sqrt{R(R + 2r_1)}$, ce qui par division par $\sqrt{R}$ s'écrit

$$4\sqrt{r_2} = \sqrt{R} + \sqrt{R + 2r_1}$$

d'où

$$\left(4\sqrt{r_2} - \sqrt{R}\right)^2 = R + 2r_1 = R + 2\left(\sqrt{R} - \sqrt{r_2}\right)^2 \text{ avec ②}$$

En posant $x = \sqrt{\frac{r_2}{R}}$, on obtient $(4x - 1)^2 = 1 + 2(1 - x)^2$ et ainsi, puisque $x > 0$,

$$x = \sqrt{\frac{r_2}{R}} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{7} \Longrightarrow \sqrt{R} = \left(2\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{r_2}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
a &= \left(\sqrt{R}+\sqrt{r_2}\right)^2 = 8r_2 \text{ soit } \sqrt{r_2} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2}} \\
\sqrt{r_1} &= \sqrt{R}-\sqrt{r_2} = 2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{r_2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\sqrt{a} \Longrightarrow r_1 = \left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)a
\end{aligned}$$

Conclusion

$$r_2 = \frac{a}{8}, \quad r_1 = \left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)a \text{ et } R = \left(\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)a$$

Références

[1] Géry Huvent. « Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises ». (Dunod, Novembre 2008).

[2] H. Fukagawa, D.Pedoe « Sankakkei en daen nado no kika mondai». (Tankobon relié, Mathpro Press 1994).