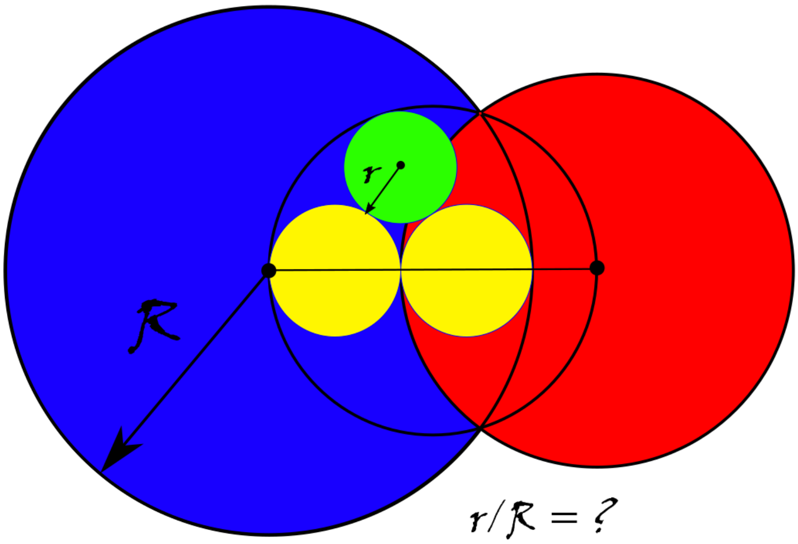
Un sangaku posté sur twitter ...

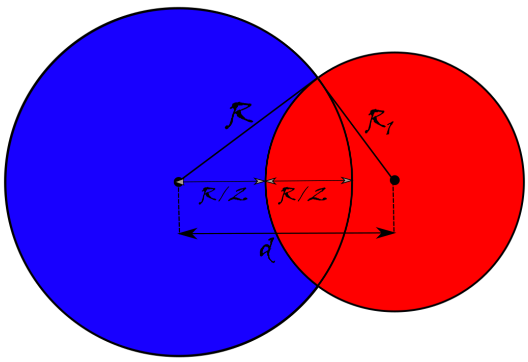
Géry Huvent

26 décembre 2018



1 Un premier résultat

L'analyse du schéma permet de conclure que les cercles bleus et rouges sont orthogonaux. De plus l'égalité des rayons des cercles jaunes se traduit par l'égalité des segments dans le schéma suivant. On commence donc par déterminer le rayon R_1 du cercle rouge en fonction de R. Les notations sont celles du schéma.



On a

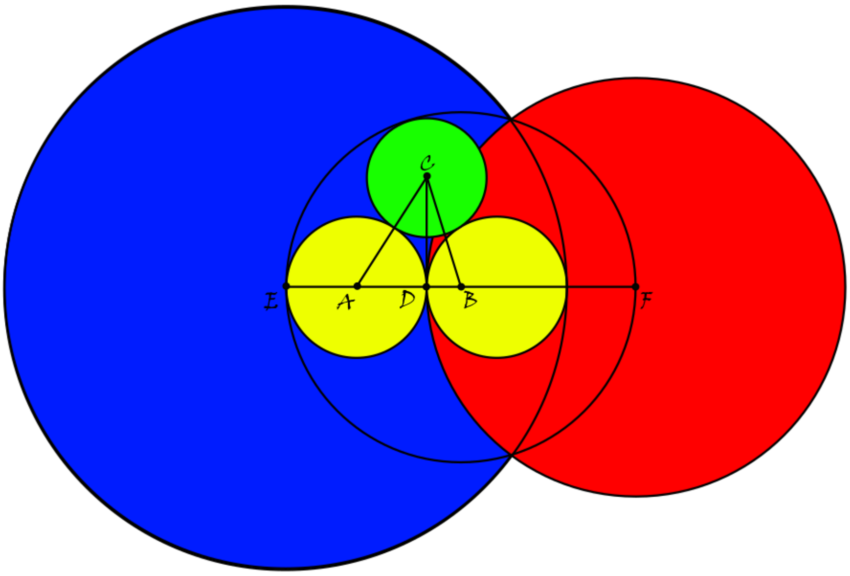
$$d^2 = R^2 + R_1^2, \qquad d = R_1 + \frac{R}{2}$$

On en déduit que

$$\left(R_1 + \frac{R}{2}\right)^2 = R^2 + R_1^2 \Longrightarrow R_1 = \frac{3}{4}R$$

2 Calcul de r

Les notations sont celles de la figure ci dessous.



On a $EF = R_1 + \dfrac{R}{2} = \dfrac{5R}{4}$, d'où $EB = \dfrac{5R}{8}$ et ainsi $DB = \dfrac{5R}{8} - \dfrac{R}{2} = \dfrac{R}{8}$.
On calcule ensuite DC avec Pythagore appliqué aux triangles ACD et BCD. On a donc

$$\begin{aligned} DC^2 &= AC^2 - AD^2 \\ \text{et } DC^2 &= BC^2 - DB^2 \end{aligned}$$

Mais $AC = \dfrac{R}{4} + r$, $AD = \dfrac{R}{4}$ et $BC = \dfrac{EF}{2} - r = \dfrac{5R}{8} - r$. On en déduit que

$$DC^2 = \left(\frac{R}{4} + r\right)^2 - \frac{R^2}{16} = \left(\frac{5R}{8} - r\right)^2 - \frac{R^2}{64}$$

d'où

$$\left(\frac{R}{4} + r\right)^2 - \frac{R^2}{16} - \left(\frac{5R}{8} - r\right)^2 + \frac{R^2}{64} = \frac{7}{4}Rr - \frac{3}{8}R^2 = 0$$

Ce qui donne

$$\frac{r}{R} = \frac{3}{14}$$