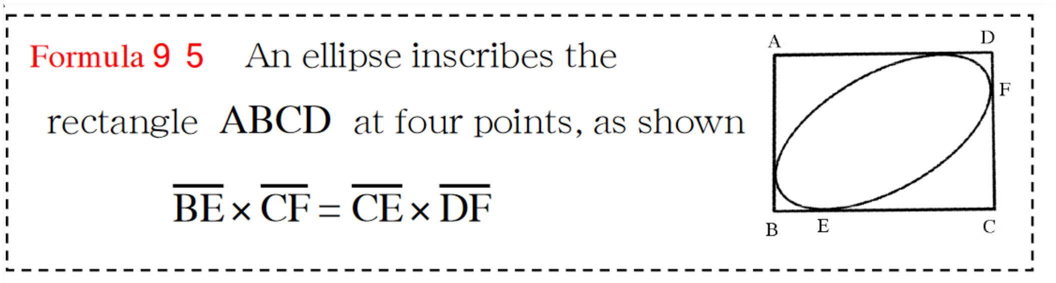
Le problème 95 du sanpo-jojutsu

Géry Huvent

22 janvier 2020

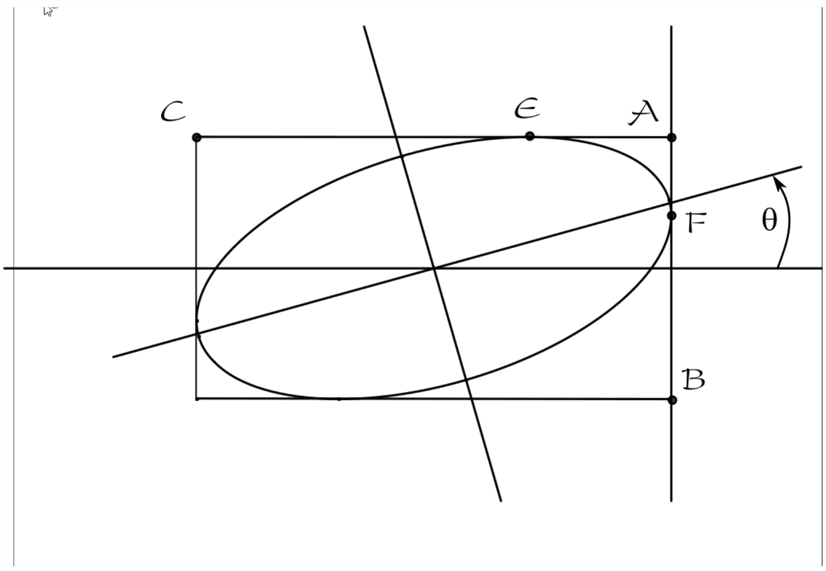
1 Le problème 95 du sanpo-jojutsu

Dans le sanpo-jojutsu (1842) écrit par yasunoshin yamaoto et disponible ici : http ://www.wasan.jp/kosiki/kosiki.html, on peut trouver une collection de formules utilisées pour la résolution de sangaku. On se propose de prouver la formule 95



2 Une solution analytique simple

On considère le schéma suivant



L'équation de l'ellipse (obtenue par rotation d'un angle θ) est

$$\frac{(x\cos\theta + y\sin\theta)^2}{a^2} + \frac{(x\sin\theta - y\cos\theta)^2}{b^2} = 1$$

La droite $\mathcal{D} : x = \alpha$ est tangente à l'ellipse si l'équation

$$b^2 \left(\alpha \cos\theta + y \sin\theta\right)^2 + a^2 \left(\alpha \sin\theta - y \cos\theta\right)^2 - a^2b^2 = 0$$

d'inconnue y admet une racine double. Cette équation donne en développant

$$\left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta\right) y^2 - 2\alpha \sin(\theta) \cos(\theta) \left(a^2 - b^2\right) y + \alpha^2 \left(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta\right) - a^2b^2$$

Son discriminant réduit étant égal à

$$a^2b^2 \left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta - \alpha^2\right)$$

On pose donc $\alpha = \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta}$, ainsi $\mathcal{D}_x : x = \alpha$ est tangente à l'ellipse. De la même manière, on pose $\beta = \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}$ et ainsi $\mathcal{D}_y : y = \beta$ est tangente à l'ellipse.

Remarque : On a $OA^2 = \alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$, ce qui prouve que A est sur le cercle de Monge de l'ellipse. Ce résultat est donné aussi dans le sanpo-jojutsu (formule 89).
Un calcul simple donne

$$\left(\left(a^2 - b^2\right) \cos\theta \sin\theta\right)^2 = \alpha^2\beta^2 - a^2b^2$$

Puisque $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que

$$\left(a^2 - b^2\right) \cos\theta \sin\theta = \sqrt{\alpha^2\beta^2 - a^2b^2}$$

La droite $\mathcal{D}_x$ coupe l'ellipse en F de coordonnées

$$F : \left(\alpha, \frac{2\alpha \sin(\theta) \cos(\theta) \left(a^2 - b^2\right)}{2\left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta\right)}\right) = \left(\alpha, \frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2 - a^2b^2}}{\alpha}\right)$$

De même D_y coupe l'ellipse en

$$E\left(\frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2 - a^2b^2}}{\beta}, \beta\right)$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
AE &= \alpha - \frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2 - a^2b^2}}{\beta} = \frac{a^2b^2}{\beta\left(\alpha\beta + \sqrt{\alpha^2\beta^2 - a^2b^2}\right)} \\
AC &= 2\alpha \\
FB &= \beta - \frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2 - a^2b^2}}{\alpha} = \frac{a^2b^2}{\alpha\left(\alpha\beta + \sqrt{\alpha^2\beta^2 - a^2b^2}\right)} \\
AB &= 2\beta
\end{aligned}$$

Ainsi

$$AE \times AB = FB \times FB$$