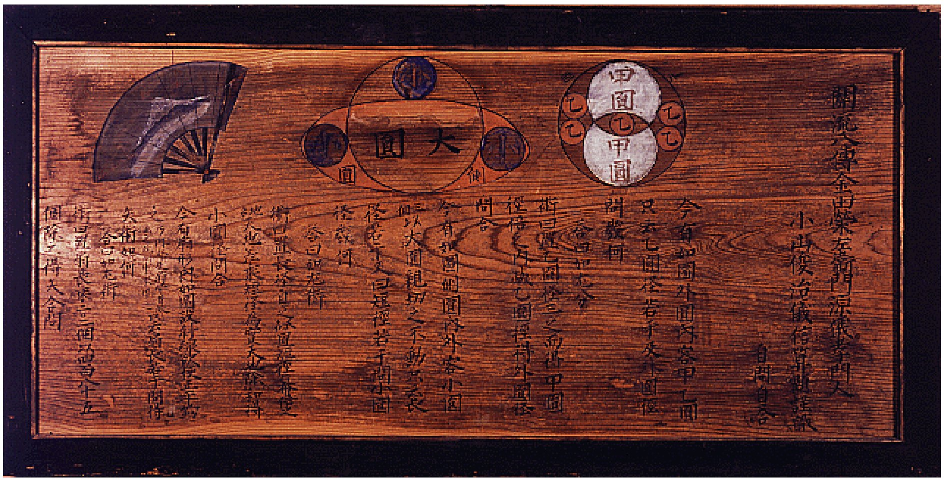
Un sangaku de la préfécture d'Iwate

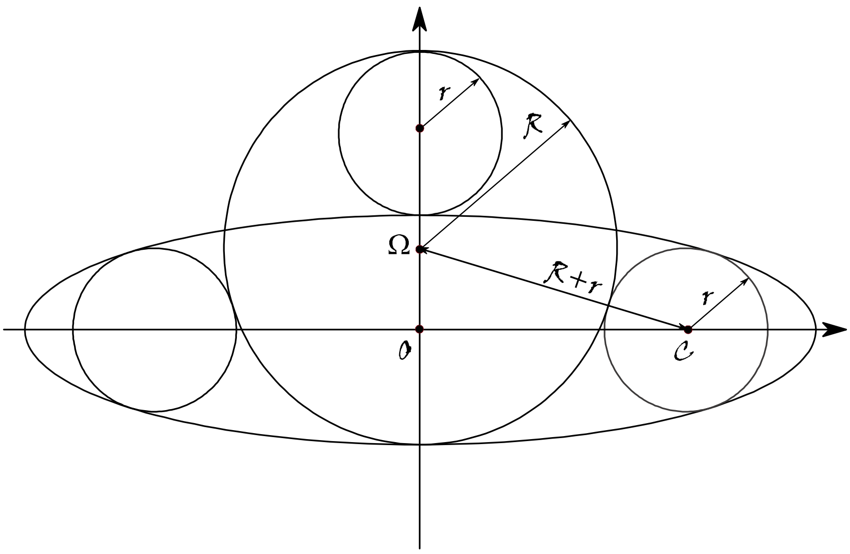
Géry Huvent

14 novembre 2019

Dans le sanctuaire Namiwake (ville d'Ichinoseki, préfécture d'Iwate), on peut voir la tablette suivante



Je n'ai malheureusement pas la traduction du problème posé par le second sangaku, cependant cela nous incite à considérer la configuarion suivante, où $\mathsf{C} \neq \mathsf{O}$.



1 Expression de r et R

On note a la longueur du demi grand axe de l'ellipse et b celle de son demi petit axe. Les notations sont celle de la figure. On sait (voir par exemple [1] page 166) que

$$OC^2 = \frac{\left(a^2 - b^2\right)\left(b^2 - r^2\right)}{b^2} \qquad (1)$$

Dans le triangle rectangle $OC\Omega$, on a

$$(R - b)^2 + OC^2 = (R + r)^2 \qquad (2)$$

Enfin le diamètre du grand cercle, calculé sur le petit axe de l'ellipse donne

$$2R = 2b + 2r \text{ soit } R = r + b \qquad (3)$$

On en déduit avec (2) et (3) que $r^2 + OC^2$

$$\frac{\left(a^2 - b^2\right)\left(b^2 - r^2\right)}{b^2} = (R + r)^2 - (R - b)^2 = (b + r)(2R + r - b) = (b + r)(b + 3r)$$

Ainsi, puisque $r \neq b$ on a

$$\frac{\left(a^2 - b^2\right)(b - r)}{b^2} = b + 3r \Longleftrightarrow r = b\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 + 2b^2}$$

et

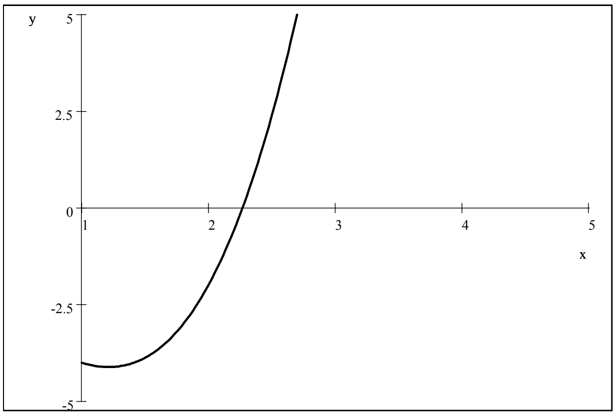
$$R = r + b = 2b\frac{a^2}{a^2 + 2b^2}$$

1.1 Une minoration du rapport $\frac{a}{b}$.

Puisque $r > 0$, cela impose $a > \sqrt{2}b$, mais il est facile de voir que la valeur minimale de r est celle obtenue lorsque le cercle $\mathcal{C}(C, R)$ est osculateur au sommet secondaire (et dans ce cas $OC = a - r$). Ainsi $r \geq \frac{b^2}{a}$, ce qui donne

$$r - \frac{b^2}{a} = b\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 + 2b^2} - \frac{b^2}{a} = \frac{b}{a\left(a^2 + 2b^2\right)}\left(a^3 - a^2b - 2ab^2 - 2b^3\right) \geq 0$$

Posons $t = \frac{a}{b}$, on a alors $r - \frac{b^2}{a} = \frac{b^4}{a\left(a^2 + 2b^2\right)}\left(t^3 - t^2 - 2t - 2\right) \geq 0$. Le graphe de $f : t \longmapsto t^3 - t^2 - 2t - 2$ pour $t \geq 1$, s'obtient facilement



La valeur minimale du rapport $\frac{a}{b}$ est l'unique solution positive de l'équation $t^3 - t^2 - 2t - 2 = 0$ égale à

$$t_{\min} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{37 + 3\sqrt{114}} + \frac{7}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{37 + 3\sqrt{114}}} + \frac{1}{3} \simeq 2,2695\cdots$$

Si $\frac{a}{b}$ est strictement inférieur à ce rapport $t_{\min}$, la configuration étudiée est impossible. Si $\frac{a}{b} = t_{\min}$, les cercles tangents aux sommets secondaires sont alors osculateurs.

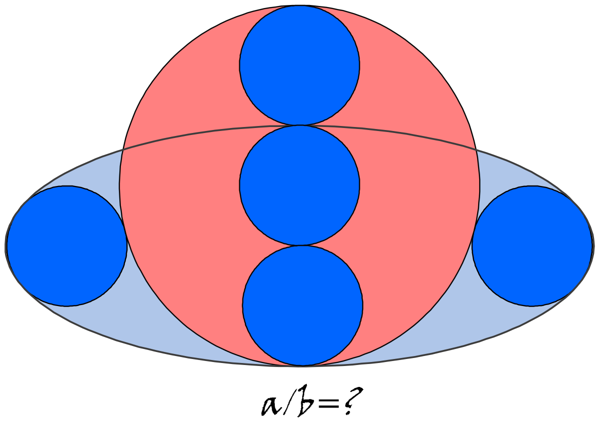
Remarque 1 *En particulier lorsque les deux cercles sont osculateurs aux sommets secondaires, on a* $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{37+3\sqrt{114}} + \frac{7}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{37+3\sqrt{114}}}$.

1.2 Un cas particulier

On peut considérer le cas particulier où $2r = b$ (ce qui est peut être le problème posé dans la préfecture d'Iwate...). On a alors

$$\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 + 2b^2} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 6b^2 = a^2, \text{ ainsi } t = \frac{a}{b} = \sqrt{6}$$

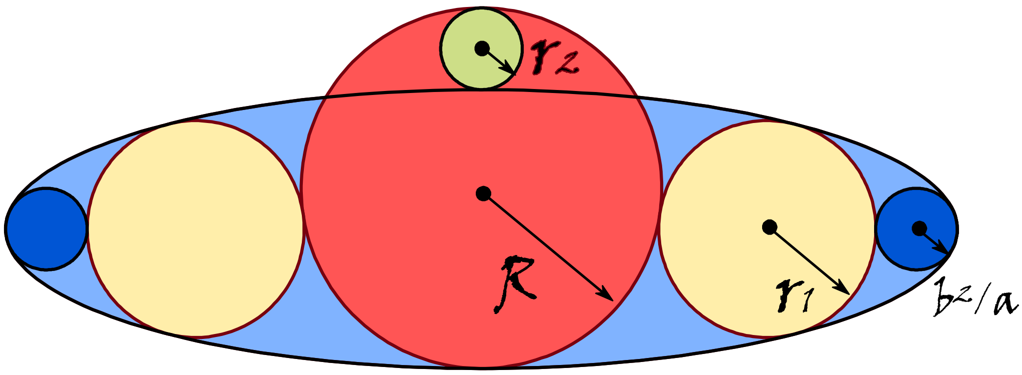
Ceci se résume dans le sangaku suivant



Les cercles ne sont pas osculateurs

2 Une première généralisation

On s'intéresse maintenant à la configuration suivante



On note encore O le centre de l'ellipse, $2a$ et $2b$ les longueurs de ces deux axes. Le point C est le centre d'un des cercles de rayon r_1.Les cercles bleus, sont osculateurs aux sommets secondaires donc de rayon égal à $\frac{b^2}{a}$. On a alors

$$OC^2 = \frac{\left(a^2 - b^2\right)\left(b^2 - r_1^2\right)}{b^2} = \left(a - 2\frac{b^2}{a} - r_1\right)^2 \qquad (1)$$

$$(R - b)^2 + OC^2 = (R + r_1)^2 \qquad (2)$$

$$R = r_2 + b \qquad (3)$$

Avec (1), on a

$$\frac{\left(a^2 - b^2\right)\left(b^2 - r_1^2\right)}{b^2} - \left(a - 2\frac{b^2}{a} - r_1\right)^2 = \frac{\left(ar_1 + b^2\right)\left(3a^2b^2 - 4b^4 - a^3r_1\right)}{a^2b^2}$$

Ce qui donne

$$r_1 = \frac{b^2}{a^3}\left(3a^2 - 4b^2\right)$$

puis (2) donne

$$(R - b)^2 + OC^2 = (R + r_1)^2 \text{ soit } (b + r_1)(2R - b + r_1) = OC^2$$

d'où

$$R = \frac{b - r_1}{2} + \frac{OC^2}{2(b + r_1)} = \frac{b - r_1}{2}\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\right) = \frac{a^2}{2b^2}(b - r_1) = \frac{(a + b)(2b - a)^2}{2ab}$$

et enfin

$$r_2 = \frac{(a - b)\left(a^2 - 2ab - 4b^2\right)}{2ab}$$

Remarque 2 *Puisque* $r_1 \geq 0$, *on a* $3a^2 - 4b^2 \geq 0$ *soit* $a \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}b$

3 Un premier sangaku

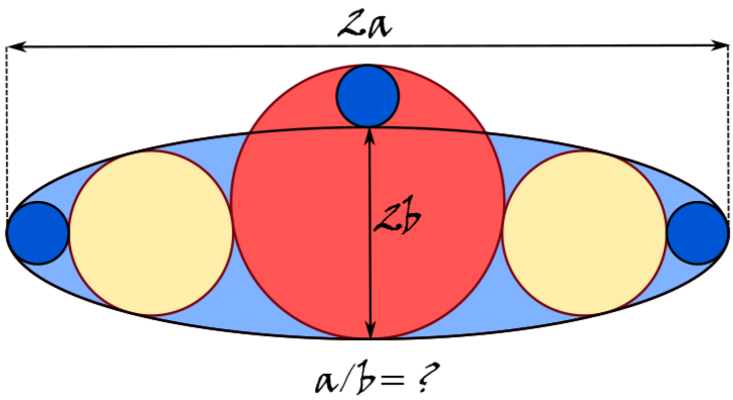
On considère le cas particulier où $r_2 = \frac{b^2}{a}$, i.e. le cercle jaune a même rayon que les cercles osculateurs bleus. Cela revient à

$$\frac{(a - b)\left(a^2 - 2ab - 4b^2\right)}{2ab} - \frac{b^2}{a} = \frac{(a + b)}{2ab}\left(a^2 - 4ab + 2b^2\right) = 0$$

ce qui donne $\frac{a}{b} = 2 \pm \sqrt{2}$. La valeur $2 - \sqrt{2} = 0,585\,79$ est inférieure à $\frac{2\sqrt{3}}{3} = 1,154\,7$ donc doit être rejetée. Ainsi

$$\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{2}$$

On en déduit le sangaku suivant



Les cercles bleus sont osculateurs

3.0.1 Une variation

On peut remarquer que

$$\begin{aligned} r_1+3r_2+4R-2a &= \frac{b^2}{a^3}\left(3a^2-4b^2\right)+3\frac{(a-b)\left(a^2-2ab-4b^2\right)}{2ab}+4\frac{(a+b)(2b-a)^2}{2ab}-2a \\ &= \frac{\left(7a^2-4ab-4b^2\right)\left(a^2-4ab+2b^2\right)(a+b)}{2ba^3} \end{aligned}$$

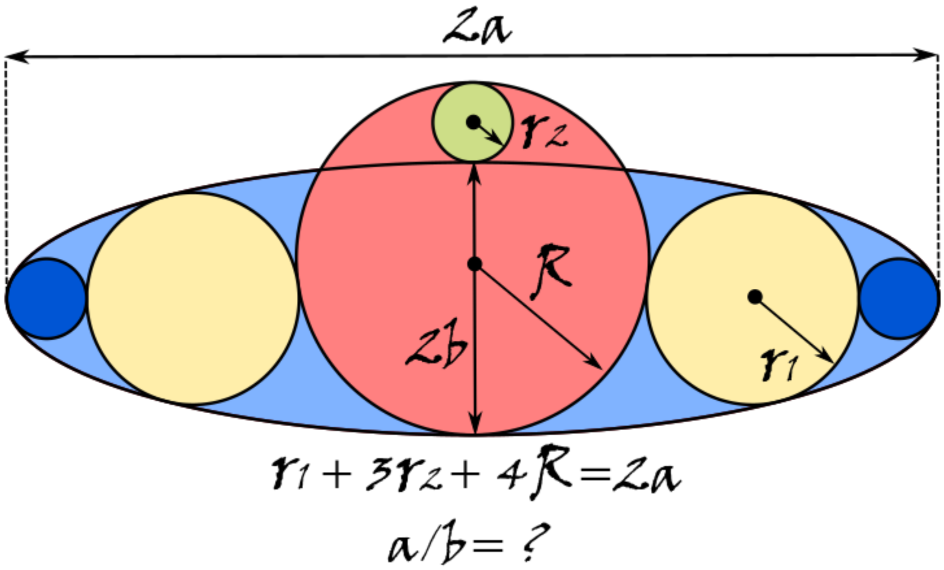
Ainsi

$$r_1+3r_2+4R=2a \Longleftrightarrow \left(7a^2-4ab-4b^2\right)\left(a^2-4ab+2b^2\right)=0$$

L'égalité $7a^2-4ab-4b^2=0$ conduit à $\frac{a}{b}=\frac{2-4\sqrt{2}}{7}<0$ ou $\frac{a}{b}=\frac{2+4\sqrt{2}}{7}<\frac{2\sqrt{3}}{3}$ qui sont des solutions à rejeter. Ainsi

$$r_1+3r_2+4R=2a \Longleftrightarrow a^2-4ab+2b^2=0 \Longleftrightarrow a=2+\sqrt{2}$$

et dans ce cas $r_2=\frac{b^2}{a}$, on retrouve la configuration précédente. Cela permet aussi de donner la variante suivante



3.1 Quelques cas particuliers

3.1.1 Cas où $r_1=\frac{b}{2}$

Le lecteur pourra vérifier que dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= 2+4\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \\ \frac{r_2}{b} &= 4\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)=2+4\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \end{aligned}$$

3.1.2 Cas où $r_2=2\frac{b^2}{a}$

On obtient alors $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{17}+3}{2}$, $\frac{r_2}{b}=\frac{\sqrt{17}-3}{2}$, $\frac{r_1}{b}=9-2\sqrt{17}$, ce qui donne, entre autres, les relations

$$\begin{aligned} a &= r_2+3b,\ r_1+4r_2=3b,\ r_1+5r_2=a \\ r_1+7r_2 &= 3R \text{ et } \frac{12}{R}+\frac{13}{r_1}=\frac{14}{r_2} \end{aligned}$$

Enfin si l'on pose $r_{osc} = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{r_2}{2}$, on obtient

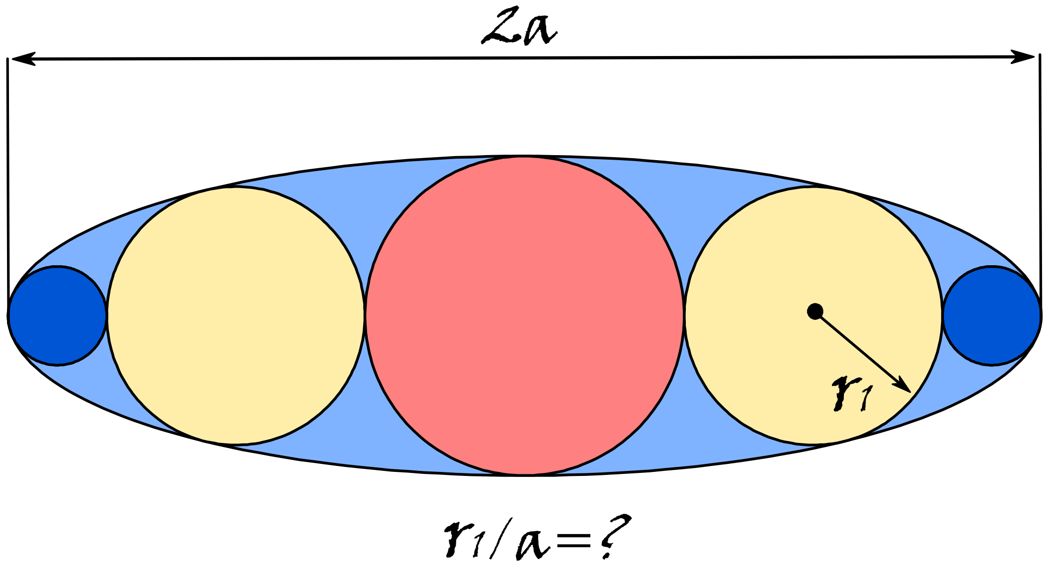
$$\begin{aligned} a &= 2r_{osc} + 3b \\ r_1 + 14r_{osc} &= 3R \end{aligned}$$

4 Un sangaku de 1838

On a $r_2 = 0 \iff a^2 - 2ab - 4b^2 = 0$ ce qui équivaut à $a = \left(1 + \sqrt{5}\right) b$ (l'autre solution donne $\dfrac{a}{b} < 0$ donc est à rejeter). On peut écrire cette condition sous la forme $\dfrac{a}{2b} = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or). Dans ce cas, on a de manière immédiate $R = b$ et

$$r_1 = \frac{\varphi}{2} b = \frac{a}{4}$$

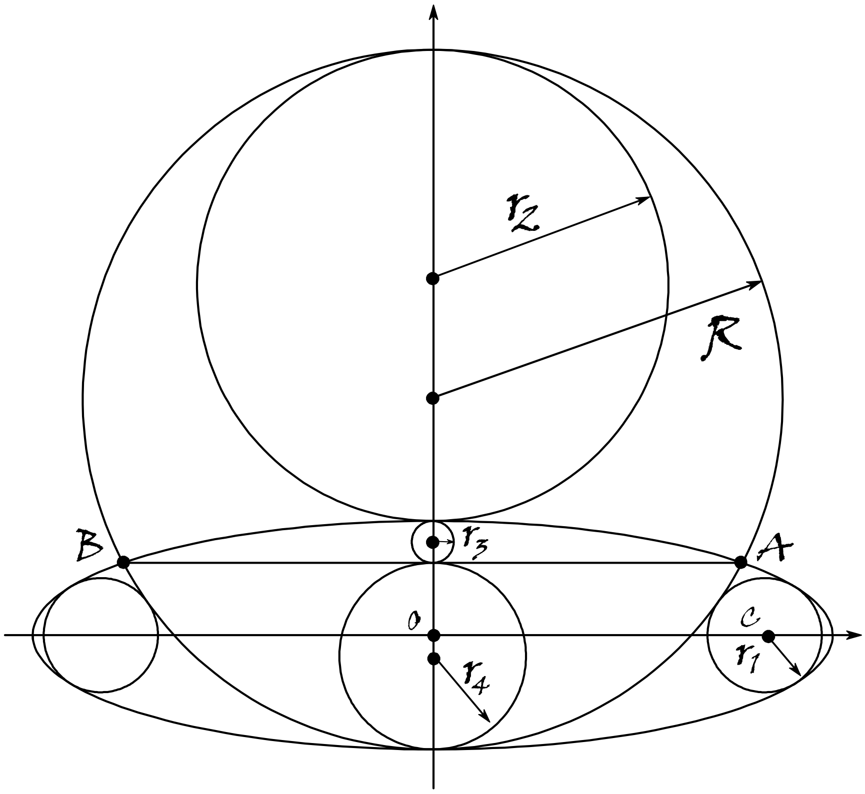
On retrouve ainsi un sangaku daté de 1838 (Préfecture d'Aichi) selon [2] et dont la tablette a disparu.



Les cercles bleus sont osculateurs. Tous les cercles sont centrs sur le grand axe et tangents entre eux.

5 Une seconde généralisation

On considère la figure suivante



Si on reprend les calculs du début de l'étude, on a toujours

$$R = \frac{a^2}{2b^2}(b - r_1)$$

Puis

$$r_2 = R - b = \frac{a^2}{2b^2}(b - r_1) - b$$

On cherche ensuite les coordonnées α et β du point A. Ces dernières sont solutions de

$$\begin{cases} x^2 + (y - (R - b))^2 = R^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

ce qui donne

$$a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2 + y^2 - 2y(R - b) + (R - b)^2 - R^2 = 0$$

Puisque $y = -b$ est solution évidente, l'autre racine s'obtient par la somme des racines et vaut donc

$$\beta = b + \frac{2(R - b)}{1 - \dfrac{a^2}{b^2}} = b - \frac{2b^2(R - b)}{a^2 - b^2} = \frac{b^3 + a^2 r_1}{a^2 - b^2}$$

A pratir de ce résultat, on en déduit que

$$r_3 = \frac{b - \beta}{2} = \frac{b - \dfrac{b^3 + a^2 r_1}{a^2 - b^2}}{2} = \frac{a^2(b - r_1)}{2(a^2 - b^2)} - \frac{b^3}{a^2 - b^2}$$

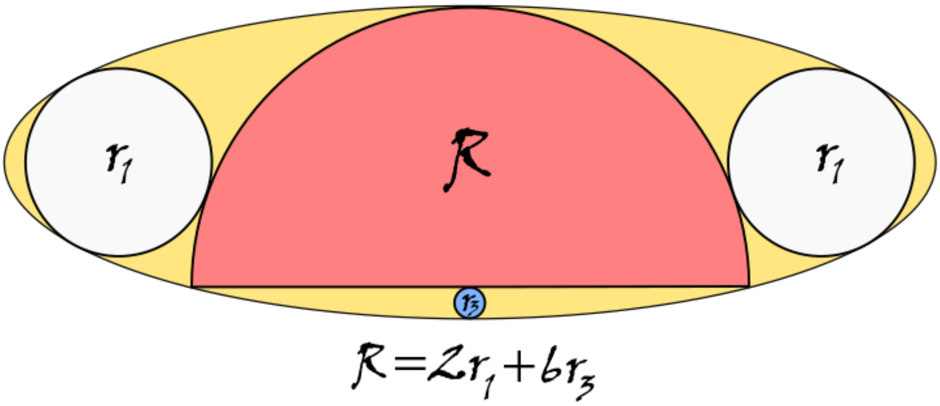
et

$$r_4 = b - r_3 = \frac{ba^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2(b - r_1)}{2(a^2 - b^2)} = \frac{a^2(b + r_1)}{2(a^2 - b^2)}$$

Remarque 3 *Dans ce cas général, on a la relation* $\left(a^2 - b^2\right) r_3 = b^2 r_2$.

5.1 Un sangaku de 1915

D'après [2], le sangaku suivant peut être trouvé sur une tablette (187 × 70,5 cm) datée de 1915 et exposée dans la ville de Yamagata. Cependant il est déjà résolu dans le «Sanpo Sokuen Syu» (1799) de Anmei Aida.



Il s'agit du cas où $[A, B]$ est un diamètre du cercle de rayon R, on demande alors de prouver que

$$R = 2r_1 + 6r_3$$

Or $[A, B]$ est un diamètre du cercle de rayon R lorsque

$$\beta = R - b$$

Puisque $\beta = b - \dfrac{2b^2(R - b)}{a^2 - b^2}$, on a

$$b - \frac{2b^2(R - b)}{a^2 - b^2} = (R - b) \text{ d'où } R = \frac{2a^2 b}{a^2 + b^2}$$

Avec

$$r_3 = \frac{b-\beta}{2} = \frac{b}{2} - \frac{R-b}{2} = \frac{b}{2}\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right) = \frac{b^3}{a^2+b^2}$$

et

$$R = \frac{a^2}{2b^2}(b - r_1) \Longrightarrow r_1 = b - \frac{2Rb^2}{a^2} = b\frac{a^2-3b^2}{a^2+b^2}$$

On a bien

$$2r_1 + 6r_3 = 2b\frac{a^2-3b^2}{a^2+b^2} + 6\frac{b^3}{a^2+b^2} = \frac{2a^2b}{a^2+b^2} = R$$

5.2 Un cas limite de ce sangaku

Puisque $r_1 = b\frac{a^2-3b^2}{a^2+b^2}$ et que $r_1 \geq \frac{b^2}{a}$, on doit avoir $\frac{a^2-3b^2}{a^2+b^2} - \frac{b}{a} = \frac{(a^2-2ab-b^2)(a+b)}{a(a^2+b^2)} \geq 0$ ce qui impose $a \geq \left(1+\sqrt{2}\right)b$. Dans ce cas, limite, on peut alors calculer les différentes valeurs des rayons $R, r_1, \cdots$ en fonction de b. On obtient alors, entre autres,

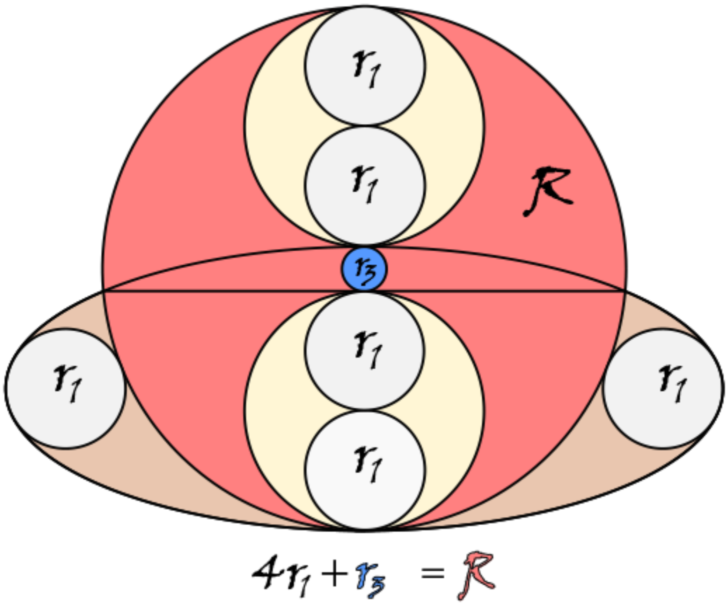
$$R = \frac{2+\sqrt{2}}{2}b,\ r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}b \text{ et } r_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}b$$

Ainsi

$$2r_3R = r_2^2$$

5.3 Une création

Dans la figure suivante, les quatre cercles blancs ont même rayon, égal à la moitié de celui des cercles jaunes. Deux des cercles blancs sont tangents à l'ellipse mais pas aux sommets secondaires, ils ne sont donc pas osculateurs.



Les cercles ne sont pas osculateurs

On demande de prouver que

$$4r_1 + r_3 = R$$

Dans cette configuration, ona $r_4 = r_2 = 2r_1$, ce qui donne le système

$$\left\{\begin{array}{l} r_2 = \frac{a^2}{2b^2}(b-r_1) - b = 2r_1 \\ r_4 = \frac{a^2(b+r_1)}{2(a^2-b^2)} = 2r_1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r_1 = b\frac{a^2-2b^2}{a^2+4b^2} \\ r_1 = b\frac{a^2}{3a^2-4b^2} \end{array}\right.$$

Il vient alors

$$\left(a^2-2b^2\right)\left(3a^2-4b^2\right)-a^2\left(a^2+4b^2\right)=2\left(a^4-7a^2b^2+4b^4\right)=0$$

Ce qui donne $a^2=\left(\dfrac{7+\sqrt{33}}{2}\right)b^2$ (l'autre solution donnant $a<b$ est à exclure), puis avec $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}\right)^2=\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{33}$, on obtient

$$a=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}b$$

En utilisant $r_1=b\dfrac{a^2-2b^2}{a^2+4b^2}$ puis les expressions de R et r_3 en fonction de a, b et r_1 on obtient alors

$$r_1=\frac{1+\sqrt{33}}{16}b,\ r_3=\frac{7-\sqrt{33}}{8}b \text{ et } R=\frac{9+\sqrt{33}}{8}b$$

ainsi

$$4r_1+r_3=4\left(\frac{1+\sqrt{33}}{16}\right)b+\left(\frac{7-\sqrt{33}}{8}\right)b=\frac{9+\sqrt{33}}{8}b=R$$

Remarque 4 *On peut également constater que* $R+r_3=\dfrac{9+\sqrt{33}}{8}b+\dfrac{7-\sqrt{33}}{8}b=2b$, *ainsi les cercles de rayon* R *et* r_3 *sont concentriques.*

Références

[1] Géry Huvent. « Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises ». (Dunod, Novembre 2008).

[2] H. Fukagawa, D.Pedoe « Japanese Temple Geometry Problems, San Gaku». (Winnipeg, Canada, 1989).