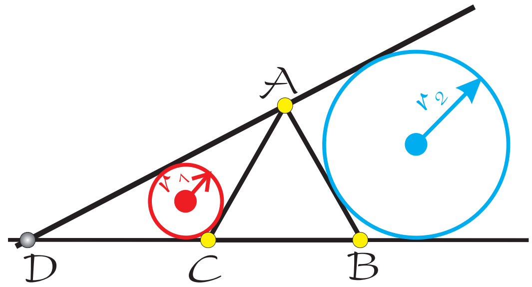
Une preuve alternative au sangaku n°22.

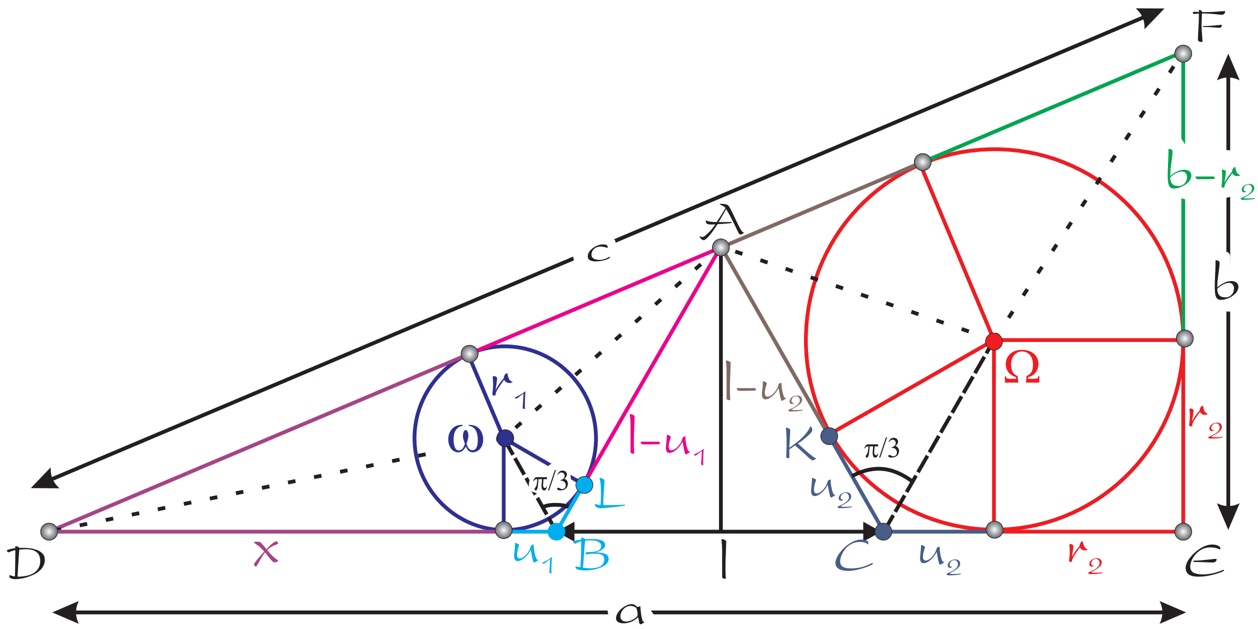
G.Huvent

25 février 2009

L'objet de ce document est de présenter une preuve alternative au sangaku n° 22 de [1]. Pour mémoire l'objet du problème est de prouver que si ABC est un triangle équilatéral, une droite variable passant par A et coupant la demi droite BC en D détermine deux cercles. Le premier, de rayon r_1, est inscrit au triangle ACD, le second, de rayon r_2, est exinscrit au triangle ABD dans l'angle $\widehat{D}$. Le sangaku demande de prouver que lorsque $\mathcal{D}$ varie, la somme $r_1 + r_2$ reste constante.



On compète le dessin pour obtenir un triangle rectangle DEF ayant pour cercle inscrit le cercle de rayon r_2. On obtient alors le schéma suivant où les segments de même couleur ont même longeur.



Dans les triangles $C\Omega K$ et $B\omega L$, l'angle en B et C vaut $\frac{\pi}{3}$, ainsi

$$u_2 = \frac{r_2}{\sqrt{3}} \text{ et } u_1 = \frac{r_1}{\sqrt{3}}$$

On calcule ensuite x en évaluant le côté c qui vaut

$$c = x + l - u_1 + l - u_2 + b - r_2 \Longrightarrow x = c - b + r_2 + u_2 + u_1 - 2l$$

Puis

$$\begin{aligned} a &= x + u_1 + l + u_2 + r_2 \\ &= c - b + 2r_2 + 2(u_2 + u_1) - l \end{aligned}$$

Ainsi

$$a + b - c = 2r_2 + 2(u_2 + u_1) - l$$

Mais $2r_2 = a + b - c$ d'où

$$2(u_2 + u_1) = \frac{2}{\sqrt{3}}(r_2 + r_1) = l$$

ce qui prouve que

$$r_2 + r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} l = h \text{ est constant égal à la hauteur du triangle } ABC$$

Remarque : Lorsque le triangle est simplement isocèle $(AB = AC = l$ et $BC = l')$, on obtient

$$u_2 = \frac{r_2}{\tan \widehat{B}} \text{ et } u_1 = \frac{r_1}{\tan \widehat{C}} = \frac{r_1}{\tan \widehat{B}}$$

$$\begin{aligned} a &= x + u_1 + l' + u_2 + r_2 \\ &= c - b + 2r_2 + 2(u_2 + u_1) + l' - 2l \end{aligned}$$

soit

$$2(u_2 + u_1) = \frac{2}{\tan \widehat{B}}(r_2 + r_1) = 2l - l'$$

ce qui prouve que $r_2 + r_1$ est encore constant.

Références

[1] Géry Huvent. « Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises ». (Dunod, Novembre 2008).