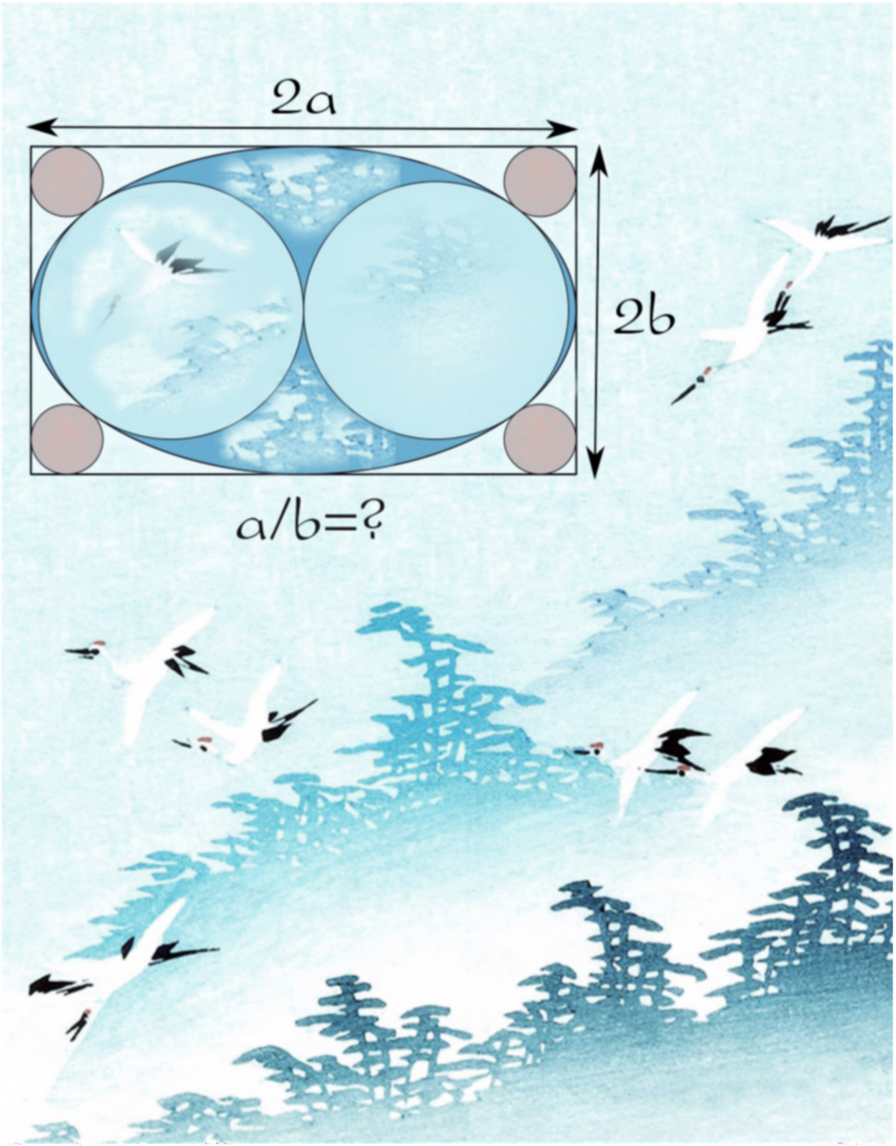
Le problème 90 du sanpo-jojutsu : Une solution et quelques sangaku.

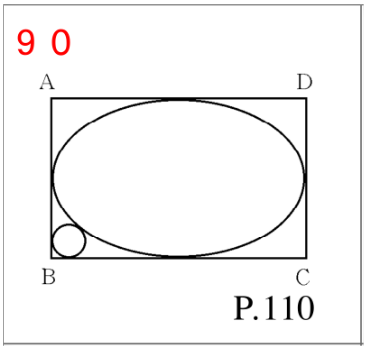
Géry Huvent

14 février 2020



1 Le problème 90 du sanpo-jojutsu

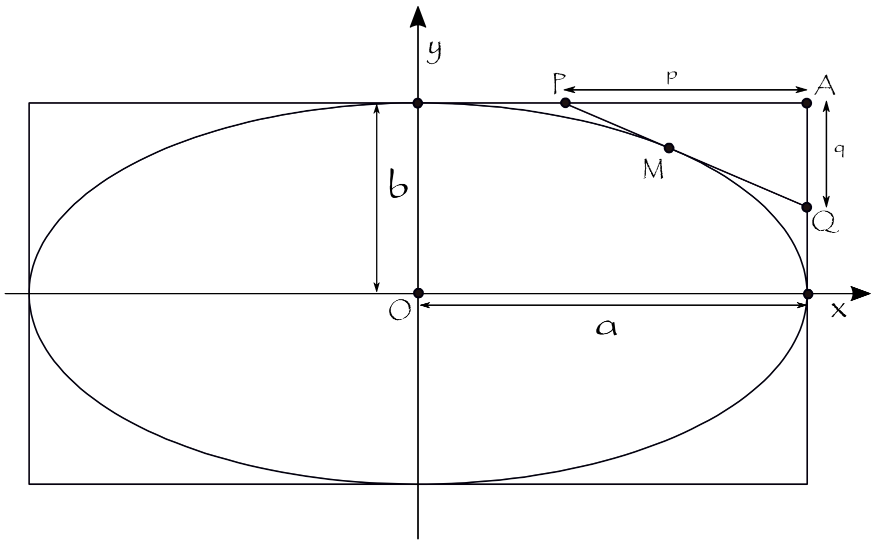
Dans le sanpo-jojutsu (1842) écrit par yasunoshin yamaoto et disponible ici : http ://www.wasan.jp/kosiki/kosiki.html, on peut trouver une collection de formules utilisées pour la résolution de sangaku. En particulier la formule 90 donne un moyen de calculer le rayon du cercle (en réalité le diamètre) tangent à une ellipse et aux côtés du rectangle circonscrit aux sommets de cette dernière.



On se propose de retrouver la valeur de ce rayon en fonction des longueurs des demi axes de l'ellipse.

2 Une configuration générale

On considère la configuration suivante :



où l'ellipse a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ dans le repère orthonormé (Oxy) et $p \in [0,a[$, $q \in [0,b[$.

2.1 Condition de tangence

On cherche la relation sur p et q pour que la droite (PQ) soit tangente à l'ellipse.

Soit $M : (x_M, y_M)$ un point de l'ellipse, la tangente $\mathcal{T}_M$ en M a pour équation $\frac{xx_M}{a^2}+\frac{yy_M}{b^2}=1$, elle passe par $P : (a-p, b)$ et $Q : (a, b-q)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{(a-p)\,x_M}{a^2}+\frac{y_M}{b}=1 \\ \frac{x_M}{a}+\frac{(b-q)\,y_M}{b^2}=1 \end{cases}$$

Puisqu'il est clair que $0<(a-p)(b-q)<ab$, on obtient, en utilisant par exemple les formules de Cramer,

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{a^2q}{ab-(a-p)(b-q)} \\ y_M &= \frac{b^2p}{ab-(a-p)(b-q)} \text{ (échange des rôles } a\leftrightarrow b \text{ et } p\leftrightarrow q) \end{aligned}$$

La condition cherchée est obtenue en écrivant que les coordonnées trouvées sont celles d'un point de l'ellipse, i.e. $\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1$ ce qui donne

$$a^2q^2+b^2p^2=((a-p)(b-q)-ab)^2 \tag{1}$$

En développant, on obtient la condition équivalente $pq\,(2aq+2bp-2ab-pq)=0$ que l'on écrit

$$2aq+2bp-2ab-pq=0 \tag{2}$$

ou encore

$$2\,(a-p)(b-q)=pq \tag{3}$$

2.2 Coordonnées de M

On commence par remarquer que

$$x_M=a-\frac{ap\,(b-q)}{ab-(a-p)(b-q)}$$

Un calcul simple montrer que (2) équivaut à

$$b-q=\frac{bp}{2a-p}$$

d'où

$$\begin{aligned} x_M &= a-\frac{ap\frac{bp}{2a-p}}{ab-(a-p)\frac{bp}{2a-p}}=a-\frac{ap^2}{a\,(2a-p)-p\,(a-p)}=a-\frac{p^2a}{(p-a)^2+a^2} \\ \text{et } y_M &= b-\frac{q^2b}{(q-a)^2+b^2} \end{aligned}$$

Remarque 1 *On peut donner plusieurs expressions des coordonnées de M. Par exemple, en utilisant la relation (1), on obtient*

$$x_M=\frac{a^2q}{ab-(a-p)(b-q)}=\frac{a^2q}{\sqrt{a^2q^2+b^2p^2}} \textit{ et } y_M=\frac{b^2p}{\sqrt{a^2q^2+b^2p^2}}$$

alors qu'avec (3), on obtient

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{a^2q}{ab-(a-p)(b-q)}=\frac{2a^2q}{2ab-pq} \\ &= a-\frac{ap\,(b-q)}{ab-(a-p)(b-q)}=a-\frac{2ap\,(b-q)}{2ab-pq} \\ y_M &= \frac{2b^2p}{2ab-pq}=b-\frac{2bq\,(a-p)}{2ab-pq} \end{aligned}$$

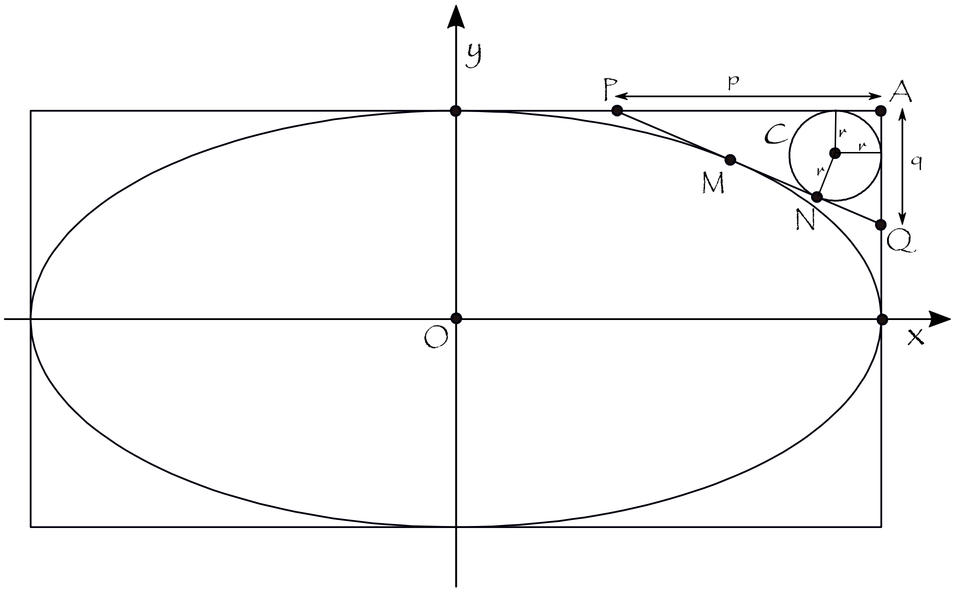
2.3 Equation de la tangente (PQ)

Une équation de (PQ) qui est ainsi la tangente en M est

$$(PQ) : q\,(a - x) + p\,(b - y) = pq$$

2.4 Cercle inscrit dans APQ

Soit $\mathcal{C}$ est le cercle inscrit au triangle APQ et r son rayon. On note N le point d'intersection de (PQ) et de $\mathcal{C}$.



2.5 Coordonnées de N

Le vecteur $\overrightarrow{n} : (q, p)$ est normal à T_M, ainsi la normale à (PQ) passant par le centre de $\mathcal{C}$ a pour équation

$$p\,(a - x) - q\,(b - y) = (p - q)\,r$$

Les coordonnées de N vérifient donc

$$\begin{cases} q\,(a - x) + p\,(b - y) = pq & \text{équation de } (PQ) \\ p\,(a - x) - q\,(b - y) = (p - q)\,r & \text{équation de la normale} \end{cases}$$

que l'on résout par Cramer pour obtenir

$$\begin{aligned} x_N &= a - \frac{p}{p^2 + q^2}\,(q\,(q - r) + pr) \\ y_N &= b - \frac{q}{p^2 + q^2}\,(p\,(p - r) + qr) \end{aligned}$$

2.6 Une relation sur r

Dans le triangle rectangle APQ on a

$$r = \frac{p + q - PQ}{2} = \frac{pq}{p + q + \sqrt{p^2 + q^2}}$$

d'où

$$2r = p + q - PQ \tag{4}$$

et

$$\frac{pq}{r} = p + q + PQ \tag{5}$$

Ainsi

$$2r + \frac{pq}{r} = 2(p+q) \tag{6}$$

Remarque 2 *Pour déterminer* r*, il faut éliminer les variables* p *et* q*. C'est ce qui va être fait en écrivant que* $x_M = x_N$*.*

Remarque 3 *La relation* (6) *s'écrit également*

$$2(p-r)(q-r) = pq$$

ce qui avec (3) *donne*

$$(p-r)(q-r) = (a-p)(b-q)$$

On en déduit la très belle relation suivante

$$\frac{p-r}{p-a} \times \frac{q-r}{q-b} = 1$$

2.7 Coordonnées de N simplifiées

La relation (6) donne

$$q = 2r\frac{p-r}{p-2r} \text{ , } q - r = \frac{pr}{p-2r} \tag{7}$$

et

$$p + q - 2r = p - r + \frac{pr}{p-2r} = \frac{(p-r)^2 + r^2}{p-2r} \tag{8}$$

Mais on a également d'après(4) et (8)

$$PQ = \sqrt{p^2+q^2} = p + (q-2r) = \frac{(p-r)^2+r^2}{p-2r}$$

Ainsi avec (7) et (8), il vient

$$x_N = a - \frac{p}{p^2+q^2}\left(q(q-r)+pr\right) = a - \frac{p}{\left(\dfrac{(p-r)^2+r^2}{p-2r}\right)^2}\left(2r\frac{p-r}{p-2r} \times \frac{pr}{p-2r} + pr\right) = a - \frac{p^2 r}{(p-r)^2+r^2}$$

et bien sûr

$$y_N = b - \frac{q^2 r}{(q-r)^2 + r^2}$$

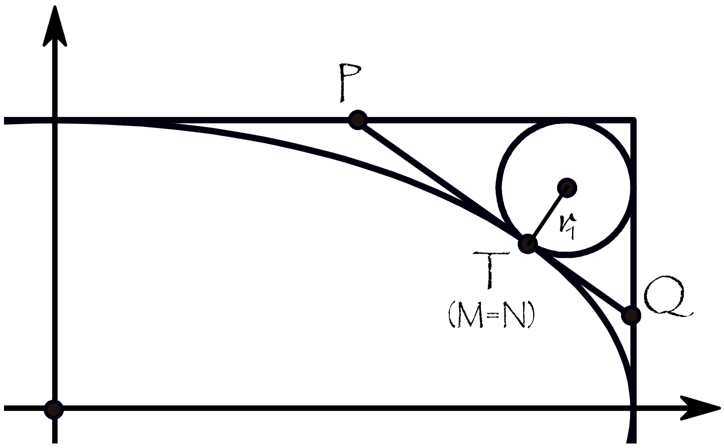
Remarque 4 *On peut déjà constater la symétrie des deux résultats*

$$x_M = a - \frac{p^2 a}{(p-a)^2 + a^2} \quad \textit{et } x_N = a - \frac{p^2 r}{(p-r)^2 + r^2}$$

Cette symétrie s'explique facilement, car une transformation affine qui transforme l'ellipse en cercle, transforme le cercle $\mathcal{C}$ *en ellipse et conserve les contacts et globalement les droites.*

3 Solution du problème 90

La configuration qui nous intéresse est celle où $M = N$, ce qui équivaut à $x_M = x_N$ (car dans ce cas, on a également $y_M = y_N$ par symétrie des rôles).
On notera dans ce cas, T le point de l'ellipse et r_1 le rayon du cercle inscrit à APQ.



Puisque

$$\begin{aligned} x_M = x_N \quad &\Longleftrightarrow \quad a\left((p-r)^2 + r^2\right) = r\left((p-a)^2 + a^2\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad a(p-r)^2 - r(p-a)^2 = a^2 r - r^2 a \\ &\Longleftrightarrow \quad (a-r)\left(-ar + p^2\right) = ar(a-r) \end{aligned}$$

Ainsi (puisque $r_1 \neq a$)

$$x_M = x_N \Longleftrightarrow p^2 = 2ar \text{ et par symétrie } q^2 = 2br \tag{9}$$

On en déduit avec (4) que

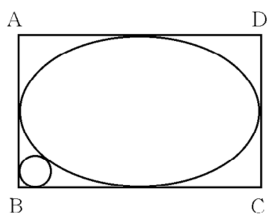
$$r_1 = \frac{p + q - \sqrt{p^2 + q^2}}{2} = \frac{\sqrt{2ar_1} + \sqrt{2br_1} - \sqrt{2r_1(a+b)}}{2}$$

d'où l'expression de r_1 en fonction de a et b

$$r_1 = \frac{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a+b}\right)^2}{2} \tag{10}$$

Remarque 5 *Dans le sanpo-jojutsu, on a un résultat un peu différent, à savoir*

Formula 9 0 An ellipse touches the rectangle ABCD at the midpoint of each side, and the circle circumscribes the ellipse and inscribes the rectangle, as shown.



Let d be the diameter of the circle, $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$,

$$d^2 + ab - 2d\sqrt{ab} - 2d(a+b) = 0$$

ce qui se traduit dans notre texte par la relation

$$(2r_1)^2 + 4ab - 4r_1\sqrt{4ab} - 4r_1\,(2a+2b) = 0$$

soit

$$r_1^2 - 2r_1\left(\sqrt{ab} + a + b\right) + ab = 0 \tag{11}$$

On vérifie la valeur trouvée pour r_1 *est bien solution de* (11) *en remarquant que*

$$\left(\sqrt{ab} + a + b\right)^2 - ab = (a+b)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$$

4 Analyse de la configuration

Dans le cas où $M = N$, on a, d'après (9)

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2ar_1} = a - \sqrt{a}\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}\right) \\ q &= \sqrt{2br_1} = b - \sqrt{b}\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{a}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$P : \left(\sqrt{a}\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}\right), b\right) \text{ et } Q : \left(a, \sqrt{b}\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{a}\right)\right)$$

et que

$$(p-a)^2 + a^2 = 2a\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}\right)$$

Ainsi

$$x_T = \frac{2a^2\,(a-p)}{(p-a)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} \text{ et } y_T = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} \tag{12}$$

L'équation de la tangente en T à l'ellipse se simplifie en

$$\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} = \sqrt{a+b} \tag{13}$$

Cette tangente coupe les deux axes de coordonnées en U et V avec

$$U : \left(\sqrt{a}\sqrt{a+b}, 0\right) \text{ et } V : \left(0, \sqrt{b}\sqrt{a+b}\right)$$

Remarque 6 *On constate que* $UP^2 = \left(\sqrt{a}\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}\right) - \sqrt{a}\sqrt{a+b}\right)^2 + b^2 = b\,(a+b)$ *donc* $UP = OV$ *et par symétrie des rôles* $VQ = OU$.

4.1 Un problème de minimum

Lorsque M décrit un quart d'ellipse, la tangente en M intersecte les demi-grand axe et demi-petit axe en U_M et V_M. On paramètre le point M par $\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La tangente $\mathcal{T}_M$ en M a pour équation $\dfrac{x\cos\theta}{a} + \dfrac{y\sin\theta}{b} = 1$. On obtient alors les coordonnées de U_M et V_M

$$U_M : \left(\frac{a}{\cos\theta}, 0\right) \text{ et } Q : \left(0, \frac{b}{\sin\theta}\right).$$

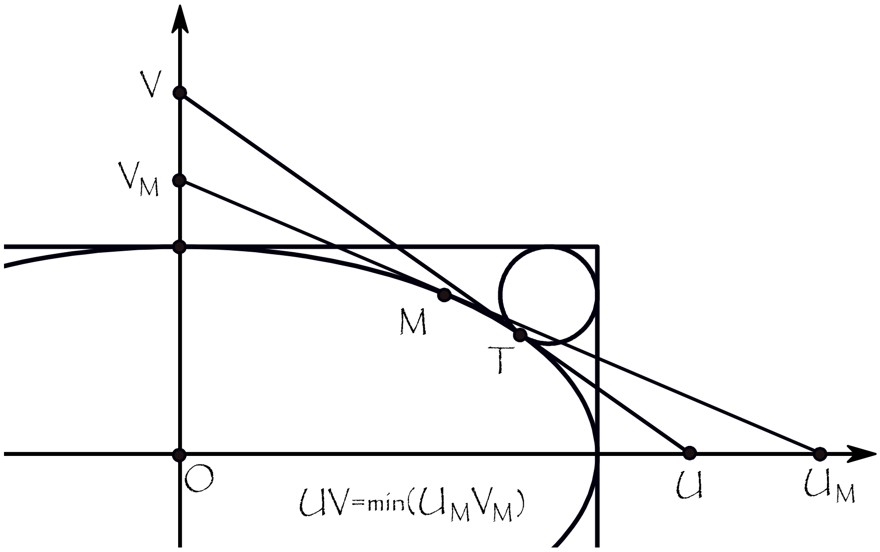
et on en déduit que $U_M V_M{}^2 = \dfrac{a^2}{\cos^2\theta} + \dfrac{b^2}{\sin^2\theta}$. On a donc

$$\frac{d}{d\theta}\left(U_M V_M{}^2\right) = 2\left(a\sin^2\theta - b\cos^2\theta\right)\frac{b\cos^2\theta + a\sin^2\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta}$$

est du signe de $\left(a\sin^2\theta - b\cos^2\theta\right) = a\cos^2\theta\left(\tan^2\theta - \frac{b}{a}\right)$. Ainsi $U_M V_M$ a un minimum en $\theta = \arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$. Puisque $\cos(\arctan u) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$ et $\sin(\arctan u) = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$, on a

$$\min(U_M V_M) = UV = a + b$$

et le point réalisant le minimum est exactement le point $T : \left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\right)$.



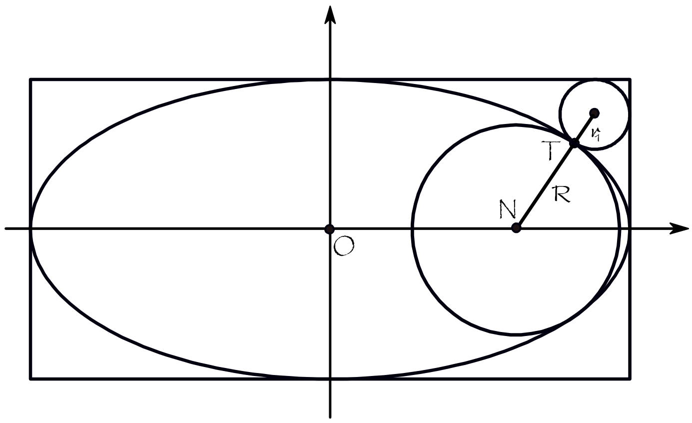
5 Le cercle tangent intérieurement à l'ellipse en T

Compte tenu de 13, le vecteur

$$\vec{n} : \left(-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}, -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right) \tag{14}$$

est unitaire et directeur de la normale à l'ellipse en T. Si N est le point d'intersection de cette normale et de l'axe Ox et si R est le rayon du cercle tangent intérieurement à l'ellipse en T, on a

$$N = T + R\vec{n} : \left(\frac{a\sqrt{a} - R\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}, \frac{b\sqrt{b} - R\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right)$$



Puisque $\mathsf{N} \in \mathsf{O}x$, on en déduit que

$$R = b\sqrt{\frac{b}{a}} \tag{15}$$

et

$$N : \left(\sqrt{a+b}\frac{a-b}{\sqrt{a}}, 0\right) \tag{16}$$

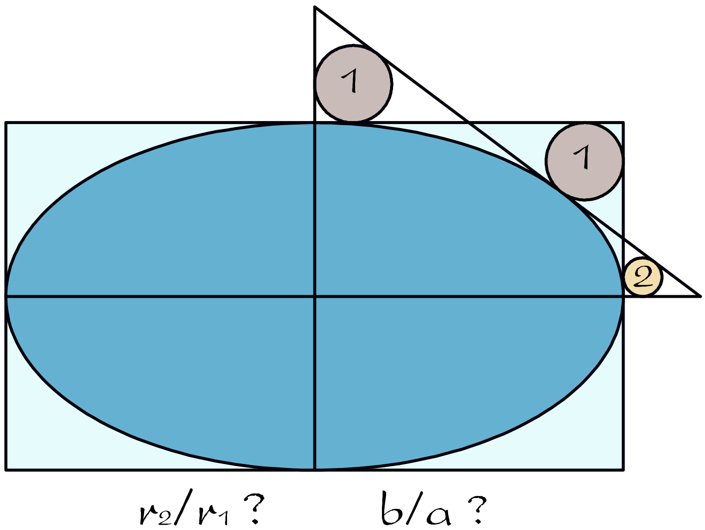
Remarque 7 *On peut facilement déterminer une équation de la normale* (NT), *à savoir*

$$x\sqrt{a} - y\sqrt{b} = (a-b)\sqrt{a+b} \tag{17}$$

6 Quelques sangaku

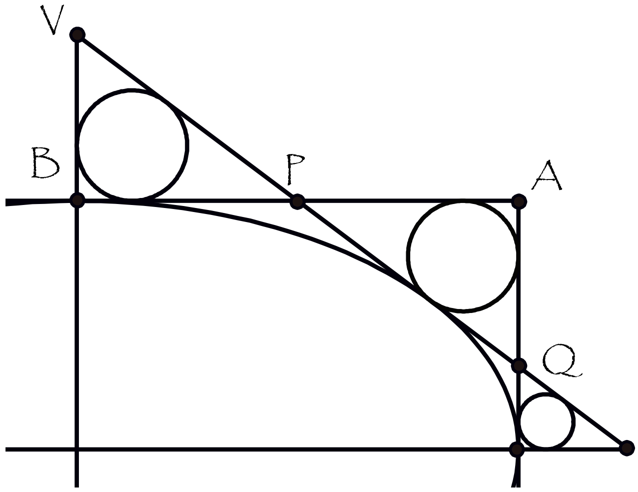
6.1 Un sangaku simple

On considère le sangaku suivant (création personnelle)



Dans ce cas, les triangles PAQ et PBV sont isométriques ainsi

$$p = \frac{a}{2}$$



ce qui donne

$$a-\sqrt{a}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{b}\right)=\frac{a}{2}$$

soit

$$\frac{1}{2}=\sqrt{1+\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{b}{a}}$$

en multipliant par $\left(\sqrt{1+\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, on obtient

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=1$$

ce qui en combinant les deux donne

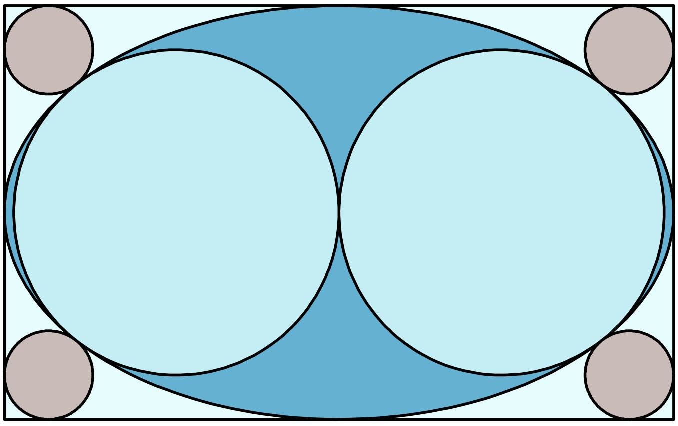
$$2\sqrt{\frac{b}{a}}=2-\frac{1}{2}\Longrightarrow b=\frac{9}{16}a$$

Puis $p=\frac{a}{2}=\sqrt{2ar_1}$ donne $r_1=\frac{a}{8}$ d'où $q=\sqrt{2br_1}=\sqrt{2\times\frac{9}{16}a\times\frac{a}{8}}=\frac{3a}{8}$ et enfin

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{b-q}{q}=\frac{b}{q}-1=\frac{1}{2}$$

6.2 Où l'on trouve (encore) le nombre d'or

On considère dans ce cas la configuration suivante (création personnelle) :



$a/b = ?$

pour laquelle $R = ON$. Or d'après (15) et (16)

$$\begin{aligned} R &= ON \Longleftrightarrow b\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{a+b}\frac{a-b}{\sqrt{a}} \Longleftrightarrow \left(\sqrt{a+b}\frac{a-b}{\sqrt{a}}\right)^2 = \left(b\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow a^2 = b\,(a+b) \Longleftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \text{ le nombre d'or} \end{aligned}$$

Remarque 8 *Dans ce cas, on a*

$$\frac{r_1}{b} = \frac{\left(1+\sqrt{\varphi}-\sqrt{1+\varphi}\right)^2}{2} = 1-(\varphi-1)\sqrt{\varphi} \;= 1-\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \;\; et \;\; \frac{R}{b} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$$

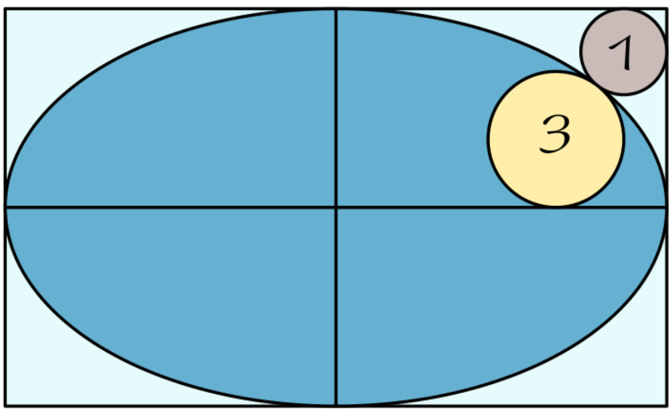
d'où

$$R + r_1 = b$$

6.3 Deux sangaku historiques

6.3.1 Un sangaku de la préfecture de Tokyo

Le sangaku suivant est selon [2] daté de 1821, la tablette ayant disparue.



$b=f(r_1,r_3)$?

On demande d'exprimer b en fonction de r_1 et de r_3. Notons ω_3 le centre du cercle ③, d'après (12) et (14), on a

$$\omega_3 = T + r_3 \overrightarrow{n} \tag{18}$$

l'ordonnée de ω_3 étant égale à r_3, on obtient

$$r_3 = \frac{b\sqrt{b} - r_3\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$$

Ainsi

$$r_3 = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}} = \sqrt{b}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a}\right) \tag{19}$$

Compte tenu de (10), on a

$$r_3 = \sqrt{b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{2r_1}\right) = b - \sqrt{2br_1}$$

On a donc $2br_1 = (b-r_3)^2$ d'où l'équation vérifiée par b :

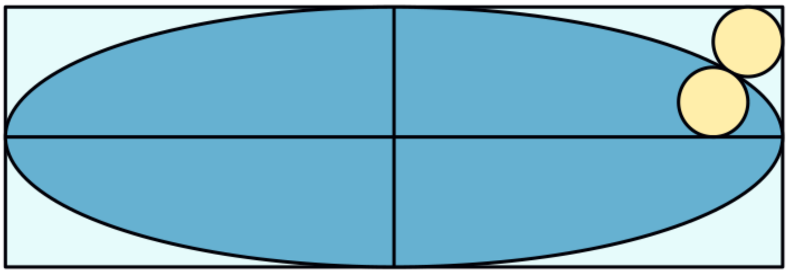
$$b^2 - 2b(r_1+r_3) + r_3^2 = 0$$

Cette équation admet deux solutions $r_1 + r_3 - \sqrt{2r_1r_3 + r_1^2} < r_3$ et $r_1 + r_3 + \sqrt{2r_1r_3 + r_1^2}$. On en déduit l'égalité (donnée par la tablette)

$$b = r_1 + r_3 + \sqrt{2r_1r_3 + r_1^2} \tag{20}$$

6.3.2 Un cas particulier

Dans [3], on trouve le sangaku suivant :



$a/b = ?$

qui est le cas particulier où $r_3 = r_1$. On a alors avec (20) $b = \left(2+\sqrt{3}\right) r_3$ et avec (19) $\dfrac{b}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{b}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a}\right)$ d'où

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = \frac{\sqrt{b}}{2+\sqrt{3}}$$

En multipliant par $\sqrt{a+b}+\sqrt{a}$, on obtient $b = \dfrac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}\right)}{2+\sqrt{3}}$, ce qui donne

$$\sqrt{b}\left(2+\sqrt{3}\right) = \sqrt{a+b}+\sqrt{a}$$

En combinant les deux expressions, il vient

$$2\sqrt{a} = \sqrt{b}\left(2+\sqrt{3}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3b}$$

et ainsi

$$a = 3b$$

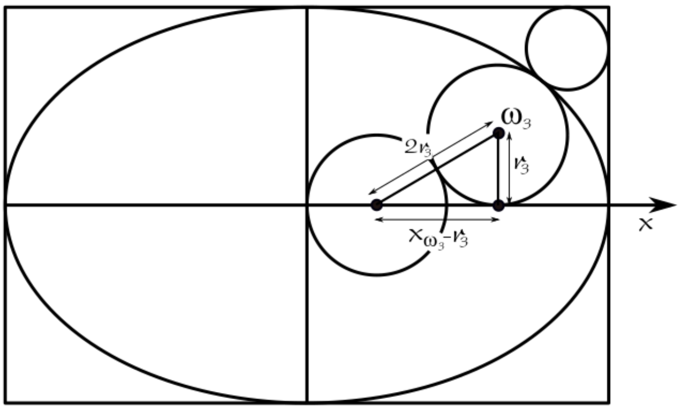
6.4 Un sangaku difficile

On considère le sangaku suivant (création personnelle).

En notant x_{ω_3} l'abscisse de ω_3, l'application du théorème de Pythagore conduit à

$$(x_{\omega_3} - r_3)^2 + r_3^2 = (2r_3)^2$$

ce qui donne après résolution $x_{\omega_3} = \left(1 + \sqrt{3}\right) r_3$.



Or d'après (18), on a

$$x_{\omega_3} = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} - r_3 \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$$

ainsi

$$\frac{a\sqrt{a} - r_3\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} = \left(1+\sqrt{3}\right) r_3$$

d'où

$$\frac{1}{r_3} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{a+b} + \sqrt{b}}{a\sqrt{a}}$$

Or avec (19)

$$\frac{1}{r_3} = \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}}{b\sqrt{b}}$$

Il s'agit donc de déterminer $\dfrac{b}{a}$ lorsque

$$\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}}{b\sqrt{b}} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{a+b} + \sqrt{b}}{a\sqrt{a}}$$

en posant $t = \dfrac{b}{a}$, cela revient à résoudre

$$\frac{1+\sqrt{1+t}}{t\sqrt{t}} = \left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{1+t} + \sqrt{t}$$

On a alors

$$\sqrt{1+t} = \frac{t^2-1}{1-\left(1+\sqrt{3}\right)t\sqrt{t}} \tag{21}$$

en élevant au carré il vient

$$(1+t) = \frac{\left(t^2-1\right)^2}{\left(1-\left(1+\sqrt{3}\right)t\sqrt{t}\right)^2}$$

ce qui équivaut à

$$\left(1-\left(1+\sqrt{3}\right)t\sqrt{t}\right)^2 = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 t^3 - 2\left(1+\sqrt{3}\right)t\sqrt{t} + 1 = \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t+1} = t^3 - t^2 - t + 1$$

d'où

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^2 t^2 - \left(t^2 - t - 1\right) = \left(3+2\sqrt{3}\right)t^2 + t + 1 = 2\left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{t}$$

soit en posant $x = \sqrt{t}$

$$\left(3+2\sqrt{3}\right)x^4 + x^2 - 2\left(1+\sqrt{3}\right)x + 1 = 0$$

Et là, un miracle car cela se factorise en

$$\left(3+2\sqrt{3}\right)\left(x^2 - x + \frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right)\left(x + x^2 + 1\right) = 0$$

Puisque $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x^2 - x + \frac{2}{3}\sqrt{3} - 1 = 0$$

ce qui donne deux solutions possibles pour x et pour t

$$t = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{45 - 24\sqrt{3}}\right)^2$$

On vérifie que seule la solution $t = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{45 - 24\sqrt{3}}\right)^2$ vérifie (21), ainsi

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{45 - 24\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{45 - 24\sqrt{3}} + \left(9 - 4\sqrt{3}\right)}{6} = 0,654005570\cdots$$

Références

[1] Géry Huvent. « Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises ». (Dunod, Novembre 2008).

[2] H. Fukagawa, D.Pedoe « Japanese Temple Geometry Problems, San Gaku». (Winnipeg, Canada, 1989).

[3] H. Fukagawa ; D. Sokolowsky « Sankakkei en daen nado no kika mondai ».(Morikitashuppan, 1994).