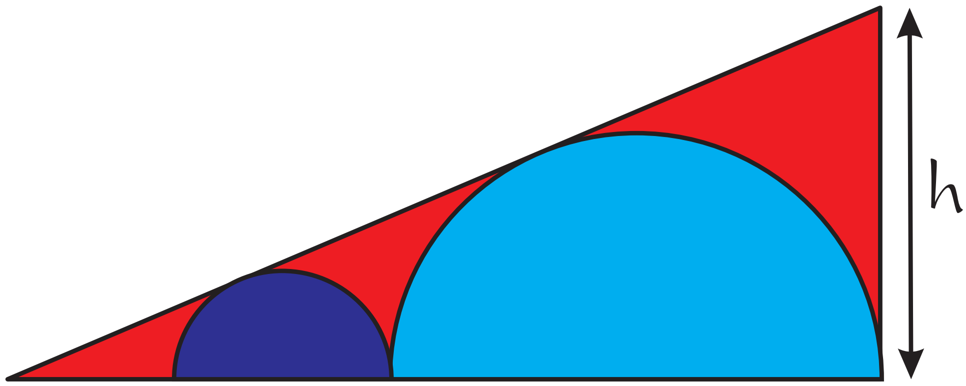
Un sangaku

Huvent Géry

25 août 2009

1 Le sangaku

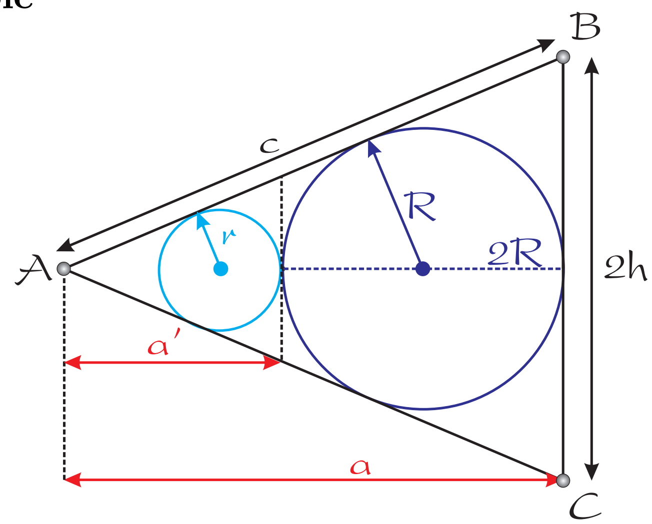


$$R/h = \sqrt{r/R}$$

Le problème posé par ce sangaku est résumé dans le schéma précédent. Je suppose que ce résultat est un classique de la géométrie japonaise, je l'ai retouvé en novembre 2004.

2 Une preuve possible

Avec les notations de la figure



Le rayon du cercle inscrit dans ABC est

$$R = \frac{ha}{h+c}$$

ainsi

$$a' = a - 2R = a - 2\frac{ha}{h+c} = a\frac{c-h}{c+h}$$

Or les deux cercles étant homothétiques, on a

$$\frac{r}{R} = \frac{a'}{a} = \frac{c-h}{c+h}$$

Mais

$$R = \frac{ha}{h+c} = \frac{ha\,(c-h)}{c^2-h^2} = \frac{h\,(c-h)}{a} \text{ car } a^2+h^2=c^2$$

d'où

$$\frac{R}{h} = \frac{a}{c+h} = \frac{c-h}{a} \Longrightarrow \left(\frac{R}{h}\right)^2 = \frac{c-h}{c+h} = \frac{r}{R}$$