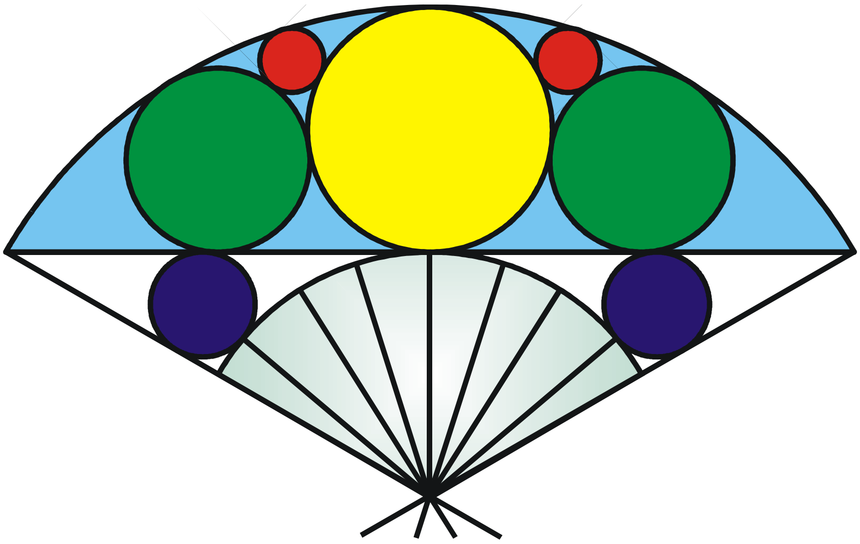
L'éventail de la Geisha

Géry Huvent

12 mars 2009



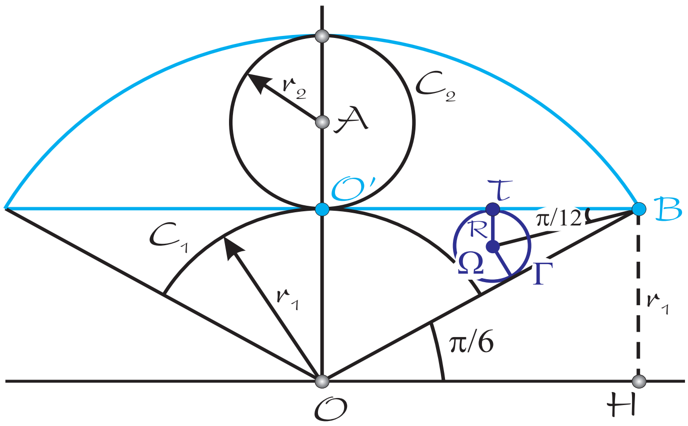
L'éventail est ouvert
aux deux tiers
Que vaut r/R ?

Son histoire

Un des nombreux sangaku où apparaît un éventail dans lequel s'inscrit de nombreux cercles tangents. La tablette sur laquelle celui ci est peint date de 1873. Elle est exposée dans le sancutaire Isaniwa situé dans la préfecture d'Ehime, sur l'île de Shikoku. On peut acheter sur place, des tablettes ema repoduisant ce sangaku ; ces tablettes sont destinées à être accrochées dans le sanctuaire. La tablette originale mesure $75cm$ sur $91cm$, on y trouve le nom de l'auteur du problème : Kinjiro Takasaka agé de onze ans, élève du maître Shoryu Yamazaki.

L'énigme Dans un éventail ouvert aux deux tiers, on inscrit sept cercles comme indiqué sur le sangaku. Les cercles de même couleur ayant même rayon. On demande de déterminer la valeur du rapport des rayons des cercles rouges et bleus.

Solution Les notations sont celles des schémas.



Dans le triangle rectangle OHB, on a $OB = r_1 + 2r_2$ et $HB = OB \sin\frac{\pi}{6} = r_1$. Ainsi

$$r_2 = \frac{r_1}{2}$$

et en particulier $O'B = OB\cos\frac{\pi}{6} = r_1\sqrt{3}$. Si T est le projeté de Ω sur $O'B$, en appliquant le résultat vu dans le premier sangaku de [1] on a $O'T = 2\sqrt{r_1 R}$ ((Ce résultat se démontre facilement à l'aide de la relation de Pythagore). Le point Ω étant sur la bissectrice de l'angle $\widehat{O'BO}$, on a $\frac{\Omega T}{BT} = \tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ On a donc

$$\frac{R}{r_1\sqrt{3} - 2\sqrt{r_1 R}} = 2 - \sqrt{3}$$

Si on pose $X = \sqrt{\frac{R}{r_1}}$, alors X est solution de

$$X^2 = \left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-2X\right)$$

dont une solution évidente est -1, l'autre solution est donc $2\sqrt{3}-3$. On a donc

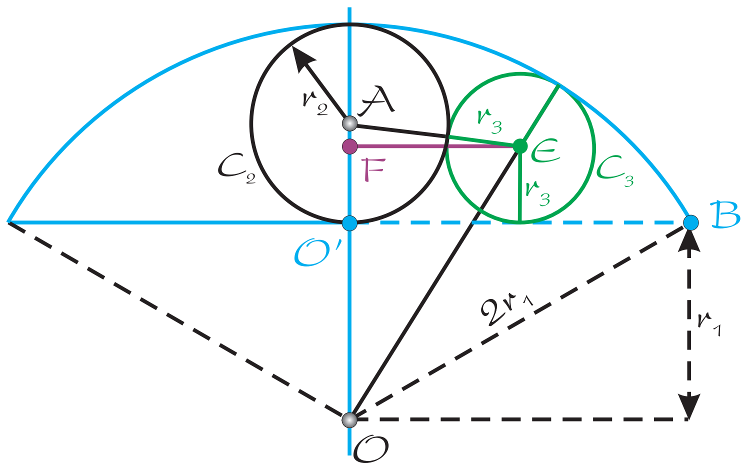
$$\frac{R}{r_1} = \left(2\sqrt{3}-3\right)^2 = \left(21 - 12\sqrt{3}\right)$$

On détermine ensuite le rayon r_3 des cercles verts. Dans le triangle OEF, on a

$$\begin{aligned}
EF^2 &= 4r_2r_3 = 2r_1r_3 \text{ (utiliser le premier sangaku de [1])} \\
OE &= 2r_1 - r_3 \\
OF &= OO' + O'F = r_1 + r_3 = \frac{3}{2}r_1 - r_3
\end{aligned}$$

La relation de Pythagore dans le triangle OEF donne alors

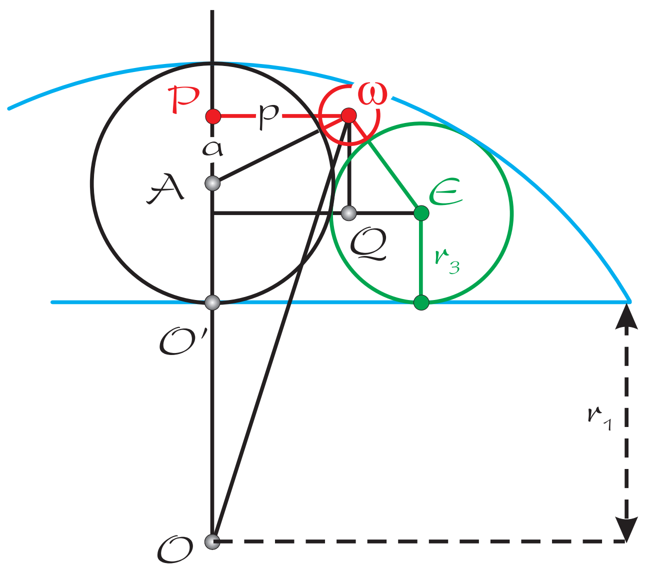
$$(r_1 + r_3)^2 + 2r_1r_3 - (2r_1 - r_3)^2 = 8r_1r_3 - 3r_1^2 = 0 \Longrightarrow r_3 = \frac{3}{8}r_1$$



Pour calculer le rayon r du dernier cercle rouge, il est très probable que l'auteur du sangaku a alors utilisé l'analogue japonais de la formule de Descartes. Ce résultat relie les courbures (inverses des rayons) de quatre cercles tangents deux à deux. Dans notre exemple, la relation sur les courbures s'énonce sous la forme

$$\left(-\frac{1}{2r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{4r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r^2}\right)$$

et permet de déterminer facilement la valeur de r. Comme il ne s'agit pas ici de démontrer la formule de Descartes, on utilise simplement la relation de Pythagore dans trois triangles rectangles.



Soit P le projeté de ω, centre du cercle rouge sur OA, on note a et p les distances AP et $P\omega$. Dans les triangles $AP\omega$ et $OP\omega$, on a

$$\begin{aligned} p^2 + a^2 &= (r_2 + r)^2 \\ p^2 + (r_1 + r_2 + a)^2 &= (2r_1 - r)^2 \end{aligned}$$

Dans le triangle $EQ\omega$, on a $QE = 2\sqrt{r_3 r_2} - p$ par application du premier sangaku, et la relation de Pythagore donne

$$(2\sqrt{r_3 r_2} - p)^2 + (a + r_2 - r_3)^2 = (r + r_3)^2$$

On remplace r_2 et r_3 par les valeurs trouvées pour obtenir

$$\begin{aligned} p^2 + a^2 &= \left(\frac{r_1}{2} + r\right)^2 && (1) \\ p^2 + \left(\frac{3}{2} r_1 + a\right)^2 &= (2r_1 - r)^2 && (2) \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r_1 - p\right)^2 + \left(\frac{r_1}{8} + a\right)^2 &= \left(\frac{3}{8} r_1 + r\right)^2 && (3) \end{aligned}$$

Par différence des équations (1) et (2) , on obtient

$$a = -\frac{5}{3} r + \frac{1}{2} r_1$$

De même, par différence de (3) et (1) et en tenant compte de la valeur trouvée précédemment pour a, on obtient

$$p = \frac{\sqrt{3}}{3} r_1 - \frac{\sqrt{3}}{18} r$$

Avec (1) , cela fournit l'équation

$$\frac{193}{108} r^2 - \frac{25}{9} r r_1 + \frac{1}{3} r_1^2 = 0$$

qui donne deux valeurs de r. Puisqu'il évident que r est inférieur à r_1, on en déduit que

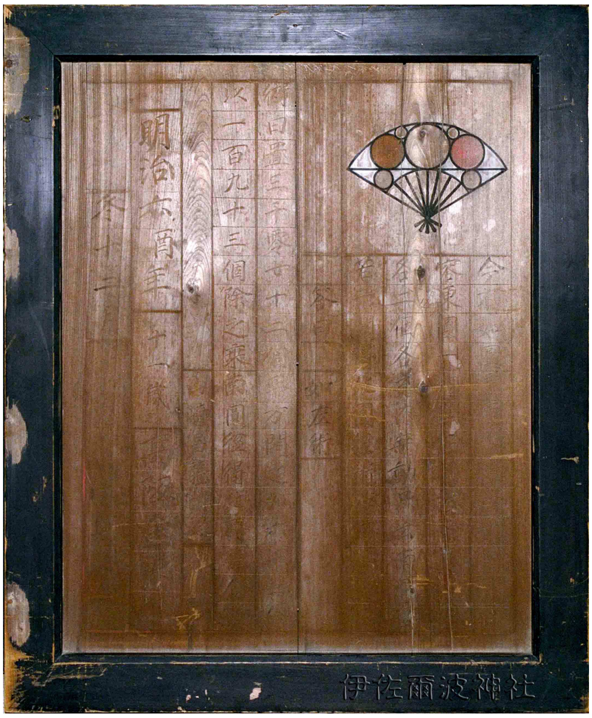
$$\frac{r}{r_1} = \frac{150 - 72\sqrt{3}}{193}$$

Pour conclure, le calcul de $\frac{r}{R}$ après multiplication par l'expression conjuguée donne

$$\boxed{\frac{r}{R} = \frac{62 + 32\sqrt{3}}{193}}$$

Le sangaku demande le calcul de ce rapport. On peut constater que le rapport inverse a une expression beaucoup plus simple.

Il est, en effet, égal à $\dfrac{31}{2} - 8\sqrt{3}$.



Références

[1] Géry Huvent. « Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises ». (Dunod, Novembre 2008).