

Formules BBP en base 3

G.Huvent

Gery.Huvent@mail.ac-lille.fr

30 juin 2001

Résumé

Notation 1 *Le lien entre les intégrales du type $\int_0^1 \frac{P(y)}{\alpha - y^b} dy$ est les formules BBP est détaillé dans [Huvent]*

1 Formules immédiates

Un calcul élémentaire montre que

$$\begin{aligned} & a \int_0^1 2 \frac{y}{y^2 - 3} dy + b \int_0^1 2 \frac{y}{y^2 + 3} dy + c \int_0^1 \frac{2y - 3}{y^2 - 3y + 3} dy + d \int_0^1 \frac{dy}{y^2 + 3} + e \int_0^1 \frac{dy}{y^2 - 3y + 3} \\ = & a (\ln(2) - \ln(3)) + b (\ln(4) - \ln(3)) - c \ln(3) + d \frac{\sqrt{3}\pi}{18} + e \frac{\sqrt{3}\pi}{9} \\ = & (a + 2b) \ln(2) - (a + b + c) \ln(3) + \frac{(d + 2e)\pi\sqrt{3}}{18} \end{aligned}$$

En annulant les coefficients de $\ln(2)$ et $\ln(3)$, on obtient la formule BBP pour $\pi\sqrt{3}$:

$$(-d + 2e)\pi\sqrt{3} = \frac{2}{81} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{729^i} \left(\frac{729b - 243e - 243d}{12i + 1} + \frac{-1215b - 243e}{12i + 2} + \frac{81d - 162e}{12i + 3} \right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{-243b - 81e}{12i + 4} + \frac{-81b - 27d - 27e}{12i + 5} - 216 \frac{b}{12i + 6} \\ & + \frac{-27b + 9d + 9e}{12i + 7} + \frac{-27b + 9e}{12i + 8} + \frac{-3d + 6e}{12i + 9} + \frac{-15b + 3e}{12i + 10} + \frac{3b + d + e}{12i + 11} \end{aligned} \quad (2)$$

Le cas particulier suivant est le plus élégant :

$$\pi\sqrt{3} = -\frac{2}{3^3} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^{6i}} \left(\frac{3^4}{12i + 2} + \frac{3^4}{12i + 3} + \frac{3^3}{12i + 4} - \frac{3}{12i + 8} - \frac{3}{12i + 9} - \frac{1}{12i + 10} \right) \quad \left(b = 0, d = -e = \frac{1}{3} \right)$$

2 Intégrales avec $\ln(y)$

Il existe (p, q, r) réels tels que

$$\begin{aligned} I_1(a, b, c) &= a \int_0^1 \frac{2y \ln(y)}{y^2 - 3} dy + b \int_0^1 \frac{2y \ln(y)}{y^2 + 3} dy + c \int_0^1 \frac{\ln(y)(2y - 3)}{y^2 - 3y + 3} dy \\ &= (a + 2b) \times p - (a + b + c) \times q + c \times r \end{aligned}$$

(les deux membres sont des formes linéaires en (a, b, c) décomposées sur deux base différentes du dual de \mathbb{R}^3)
Plouffe a montré que

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \frac{2}{27} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{729^i} \left(\frac{243}{(12i+1)^2} - \frac{405}{(12i+2)^2} - \frac{81}{(12i+4)^2} - \frac{27}{(12i+5)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{72}{(12i+6)^2} - \frac{9}{(12i+7)^2} - \frac{9}{(12i+8)^2} - \frac{5}{(12i+10)^2} + \frac{1}{(12i+11)^2} \right) \end{aligned}$$

ce qui traduit sous forme intégrale, donne

$$-2 \int_0^1 2 \frac{\ln(y)y}{y^2 - 3} dy + \int_0^1 2 \frac{\ln(y)y}{y^2 + 3} dy + \int_0^1 \frac{\ln(y)(2y - 3)}{y^2 - 3y + 3} dy = \frac{\pi^2}{18}$$

et correspond à l'égalité $I_1(-2, 1, 1) = r = \frac{\pi^2}{18}$. On en déduit la valeur de r .

Or on a

$$\begin{aligned} I_1(1, 1, 0) &= \int_0^1 2 \frac{\ln(y)y}{y^2 - 3} dy + \int_0^1 2 \frac{\ln(y)y}{y^2 + 3} dy \\ &= \frac{1}{4} L_2\left(\frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

où $L_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$

On en déduit

$$3p - 2q = \frac{1}{4} L_2\left(\frac{1}{9}\right) \quad (3)$$

Mais Ramanujan a prouvé que

$$L_2\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6} L_2\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{\pi^2}{18} - \frac{\ln^2(3)}{6}$$

En utilisant

$$\begin{aligned} I_1(1, 0, 0) &= \int_0^1 \frac{2y \ln(y)}{y^2 - 3} dy \\ &= \frac{1}{2} L_2\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

On en déduit

$$I_1 \left(\frac{8}{6}, -\frac{4}{6}, 0 \right) = L_2 \left(\frac{1}{3} \right) - \frac{1}{6} L_2 \left(\frac{1}{9} \right)$$

et

$$-\frac{2}{3}q = \frac{\pi^2}{18} - \frac{\ln^2(3)}{6} \quad (4)$$

De (3) et (4) on tire les valeurs de p et q et l'égalité

$$I_1(a, b, c) = (a - b + 5c) \frac{\pi^2}{36} + (-a + b - 3c) \frac{\ln^2(3)}{12} + (a + 2b) \frac{L_2\left(\frac{1}{9}\right)}{12}$$

Remarque 2 $I_1\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) = L_2\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}L_2\left(\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{18}\pi^2 + \frac{1}{6}\ln^2 3$ est une autre relation prouvée par Ramanujan.

Remarque 3

$$\begin{aligned} I_1(-10, 5, 3) &= \frac{1}{2} \ln^2 3 \\ &= \int_0^1 -20 \frac{\ln(y)y}{y^2-3} + 10 \frac{\ln(y)y}{y^2+3} + 3 \frac{\ln(y)(2y-3)}{y^2-3y+3} dy \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(y)P(y)}{y^{12}-729} dy \end{aligned}$$

$$\text{où } P(y) = 4y^{11} - 9y^{10} + 81y^9 + 117y^7 + 81y^6 + 972y^5 + 243y^4 + 1053y^3 + 6561y - 2187$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln^2 3 &= -729 \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{729^k} \left(\frac{4}{(12k+12)^2} - \frac{9}{(12k+11)^2} + \frac{81}{(12k+10)^2} + \frac{117}{(12k+8)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{81}{(12k+7)^2} + \frac{972}{(12k+6)^2} + \frac{243}{(12k+5)^2} + \frac{1053}{(12k+4)^2} + \frac{6561}{(12k+2)^2} - \frac{2187}{(12k+1)^2} \right) \end{aligned}$$

Remarque 4 $I_1(a, b, 0) = (a - b) \left(\frac{\pi^2}{36} - \frac{\ln^2(3)}{12} \right) + (a + 2b) \frac{L_2\left(\frac{1}{9}\right)}{12} = a \int_0^1 2 \frac{\ln(y)y}{y^2-3} dy + b \int_0^1 2 \frac{\ln(y)y}{y^2+3} dy$, avec $a = -2$ et $b = 1$ et le changement de variable $u = y^2$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(u)(u+9)}{u^2-9} du = \frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{2}\ln^2(3)$$

et l'égalité

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{9^i i^2} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{9^i \left(i + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}\pi^2 - 2\ln^2(3)$$

Remarque 5

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{9^i i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{9^i \left(i + \frac{1}{2}\right)} = 2\ln 3$$

3 Intégrales avec $\ln^2(y)$

Il existe (p_2, q_2, r_2) réels tels que

$$\begin{aligned} I_2(a, b, c) &= a \int_0^1 2 \frac{\ln^2(y)y}{y^2-3} dy + b \int_0^1 2 \frac{\ln^2(y)y}{y^2+3} dy + c \int_0^1 \frac{\ln^2(y)(2y-3)}{y^2-3y+3} dy \\ &= (a-b+5c) \frac{\pi^2}{36} \times p_2 + (-a+b-3c) \frac{\ln^2(3)}{12} \times q_2 + (a+2b) \frac{L_3\left(\frac{1}{9}\right)}{12} \times r_2 \end{aligned}$$

Le calcul de r_2 est élémentaire car

$$\begin{aligned} I_2(1, 1, 0) &= \int_0^1 2 \frac{\ln^2(y)y}{y^2-3} dy + \int_0^1 2 \frac{\ln^2(y)y}{y^2+3} dy \\ &= -\frac{L_3\left(\frac{1}{9}\right)}{8} \\ &= \frac{L_3\left(\frac{1}{9}\right)}{4} \times r_2 \end{aligned}$$

Proposition 6 On a

$$\frac{13}{2} \zeta(3) - 6L_3\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi^2 \ln(3)}{2} + 3L_3\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\ln^3(3)}{2} = 0 \quad (5)$$

Cette relation est équivalente à

$$\begin{aligned} L_3\left(\frac{1}{9}\right) - 12L_3\left(\frac{1}{3}\right) &= -\frac{2\ln^3(3)}{3} - \frac{26\zeta(3)}{3} + \frac{2\pi^2 \ln(3)}{3} \\ L_3\left(\frac{1}{9}\right) - 6L_3\left(-\frac{1}{3}\right) &= \frac{\ln^3(3)}{3} + \frac{13\zeta(3)}{3} - \frac{\pi^2 \ln(3)}{3} \end{aligned}$$

Preuve. L'équation de Kummer pour les polylogarithmes d'ordre 3 s'écrit

$$\begin{aligned} L_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) + L_3(xy) + L_3\left(\frac{x}{y}\right) &= 2L_3\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) + 2L_3\left(-\frac{x(1-y)}{1-x}\right) \\ &+ 2L_3\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + 2L_3\left(-\frac{1-y}{y(1-x)}\right) \\ &+ 2L_3(x) + 2L_3(y) \\ &- 2\zeta(3) + \ln^2(y) \ln\left(\frac{1-y}{1-x}\right) - \frac{\pi^2}{3} \ln(y) - \frac{\ln^3(y)}{3} \end{aligned}$$

Avec $x = \frac{2}{3}$ et $y = \frac{1}{3}$, on obtient

$$\begin{aligned} 4L_3\left(\frac{3}{2}\right) + 2L_3(-3) - 2L_3\left(\frac{1}{3}\right) - L_3\left(\frac{4}{3}\right) &= \frac{4}{3}\pi^2 \ln(2) - \pi^2 \ln(3) - \frac{2}{3}\ln^3(2) \\ &+ \frac{1}{2}\ln^3(3) - \ln(2) \ln^2(3) + 2\ln^2(2) \ln(3) \\ &+ i\left(\frac{3}{2}\ln^3(3)\pi - 2\ln(2) \ln(3)\pi\right) \end{aligned} \quad (6)$$

L'équation de Landen est

$$L_3(z) + L_3(1-z) + L_3\left(\frac{z}{z-1}\right) = \zeta(3) + \frac{\pi^2}{6} \ln(1-z) - \frac{1}{2} \ln(z) \ln^2(1-z) + \frac{1}{6} \ln^3(1-z)$$

Appliquée à $z = \frac{3}{4}$ et à $z = \frac{2}{3}$, elle permet d'exprimer $L_3\left(\frac{3}{4}\right)$ et $L_3\left(\frac{2}{3}\right)$ en fonction de $L_3\left(\frac{1}{3}\right)$, $L_3(-2)$, $L_3\left(-\frac{1}{3}\right)$ et $L_3\left(\frac{1}{4}\right)$. La relation

$$L_3\left(\frac{1}{z}\right) = L_3(z) + \ln(-z) \frac{\pi^2}{6} + \frac{\ln^3(-z)}{6}$$

appliquée à $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, -2 et $-\frac{1}{3}$ permet de simplifier le membre de gauche de (6).
Il reste ensuite à utiliser les deux égalités suivantes

$$\begin{aligned} L_3\left(\frac{1}{2}\right) + L_3\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} L_3\left(\frac{1}{4}\right) && \text{(Formule de duplication)} \\ L_3\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{7}{8} \zeta(3) - \frac{\pi^2 \ln(2)}{12} + \frac{\ln^3(2)}{6} \end{aligned}$$

pour conclure ■

Avec $\int_0^1 2 \frac{\ln^2(y)y}{y^2-3} dy = -\frac{1}{2} L_3\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\int_0^1 2 \frac{\ln^2(y)y}{y^2+3} dy = -\frac{1}{2} L_3\left(-\frac{1}{3}\right)$, (5) peut s'écrire

$$\begin{aligned} I_2(-12, 6, 0) &= \frac{13}{2} \zeta(3) - \frac{\pi^2 \ln(3)}{2} + \frac{\ln^3(3)}{2} \\ &= -\frac{\pi^2}{2} p_2 + \frac{3}{2} \ln^2(3) q_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Si on remplace p_2 par sa valeur en fonction de q_2 , le membre de droite de $I_2(a, b, c)$ devient un polynôme de degré 1 en q_2 dont le coefficient de q_2 est égal à $\frac{\ln^3(3)}{6}c$. Ainsi $I_2(a, b, 0)$ ne dépend pas de q_2 . Après calculs, on obtient

$$a \int_0^1 \frac{2 \ln^2(y)y}{y^2-3} dy + b \int_0^1 \frac{2 \ln^2(y)y}{y^2+3} dy = -\frac{(a+2b)}{12} L_3\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{(-a+b)}{36} \left(13\zeta(3) + \ln^3(3) - \frac{\pi^2 \ln(3)}{36}\right)$$

En particulier, on obtient avec $a = 1$, $b = -1$

$$12 \int_0^1 \frac{y \ln^2(y)}{(y^2-3)(y^2+3)} dy = -\frac{\ln^3(3)}{18} - \frac{13}{18} \zeta(3) + \frac{L_3\left(\frac{1}{9}\right)}{24} + \frac{\pi^2 \ln(3)}{18}$$

ce qui donne l'égalité

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{9^i i^3} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{9^i \left(i + \frac{1}{2}\right)^3} = \frac{4 \left(\ln^2(3) - \pi^2\right) \ln(3)}{3} + \frac{52}{3} \zeta(3)$$

Remarque 7 On peut aussi prendre $a = -2$, $b = 1$ et faire le changement de variables $u = y^2$ qui conduit à

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(u)(u+9)}{u^2-9} du = -\frac{1}{3} \ln^3 3 + \frac{1}{3} \pi^2 \ln 3 - \frac{13}{3} \zeta(3)$$

et à la même égalité pour les séries.

Il reste à calculer les valeurs exactes de p_2 et q_2 .

Proposition 8 On a l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(y)(2y-3)}{y^2-3y+3} dy = -\frac{26}{9}\zeta(3) + \frac{5\pi^2 \ln(3)}{36} - \frac{\ln^3(3)}{12}$$

Preuve. L'équation de Landen appliquée à $z = \frac{1}{z_1}$ où $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ est une racine de $y^2 - 3y + 3$ (l'autre racine est z_2 telle que $\frac{1}{z_2} = 1 - \frac{1}{z_1}$) donne

$$L_3\left(\frac{1}{z_1}\right) + L_3\left(1 - \frac{1}{z_1}\right) + L_3\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \zeta(3) - \frac{5\pi^2 \ln(3)}{72} + \frac{\ln^3(3)}{24} + \frac{2i\pi^3}{81}$$

Or $L_3\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = -\frac{4}{9}\zeta(3) + \frac{2i\pi^3}{81}$ et $\int_0^1 \frac{\ln^2(y)(2y-3)}{y^2-3y+3} dy = -2\left(L_3\left(\frac{1}{z_1}\right) + L_3\left(\frac{1}{z_2}\right)\right)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} I_2(0,0,1) &= \int_0^1 \frac{\ln^2(y)(2y-3)}{y^2-3y+3} dy \\ &= \frac{5\pi^2}{36}p_2 - \frac{\ln^2(3)}{4}q_2 \\ &= -\frac{26}{9}\zeta(3) + \frac{5\pi^2 \ln(3)}{36} - \frac{\ln^3(3)}{12} \end{aligned} \tag{8}$$

■

En utilisant les équations (7) et (8), on en déduit que

$$\begin{aligned} p_2 &= 1 - \frac{65}{2} \frac{\zeta(3)}{\pi^2 \ln(3)} \\ q_2 &= \frac{1}{3} - \frac{13}{2} \frac{\zeta(3)}{(\ln(3))^3} \end{aligned}$$

Et ainsi

$$I_2(a,b,c) = \frac{-a+b-3c}{36} \ln^3(3) + \frac{a-b+5c}{36} \pi^2 \ln(3) + \frac{-a-2b}{24} L_3\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{13(-a+b-8c)}{36} \zeta(3)$$

Remarque 9 Avec $a = -2$, $b = c = 1$ on obtient

$$3 \int_0^1 \frac{\ln^2(y)(y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 24y + 9)}{(y^2-3)(y^2+3)(y^2-3y+3)} dy = \frac{\pi^2 \ln(3)}{18} - \frac{65}{36} \zeta(3)$$

et la formule BBP suivante

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 \ln(3)}{18} - \frac{65}{36} \zeta(3) &= -\frac{2}{3^5} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{729^i} \left(\frac{243}{(12i+1)^3} - \frac{405}{(12i+2)^3} - \frac{81}{(12i+4)^3} - \frac{27}{(12i+5)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{72}{(12i+6)^3} - \frac{9}{(12i+7)^3} - \frac{9}{(12i+8)^3} - \frac{5}{(12i+10)^3} + \frac{1}{(12i+11)^3} \right) \end{aligned}$$

Comparer avec la Formule de Plouffe page 1.

Références

[Huvent] G.Huvent *Formules BBP, Publications IRMA*