Chapitre 14
NOMBRES RÉELS

Enoncé des exercices

1 Les basiques

Exercice 14.1 *Montrer que* $2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$

Exercice 14.2 *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *déterminer le maximum de* $f(x) = x(2n - x)$. *En déduire que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2n)! \leq 2n^{2n}$

Exercice 14.3 *Soit* $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 4}$ *déterminer* $\sup\limits_{\mathbb{R}} f$ *et* $\inf\limits_{\mathbb{R}} f$.

Exercice 14.4 *Soient* A *et* B *deux parties non vides et bornées de* $\mathbb{R}$ *telles que* $A \subset B$, *montrer que* $\sup A \leq \sup B$ *et* $\inf B \leq \inf A$.

Exercice 14.5 *Soient* x *et* y *des réels, montrer que :*

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$
2. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$

Exercice 14.6 *Montrer que pour* $n \geq 1$ *et* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *des réels positifs on a*

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$$

En déduire que pour $n \geq 1$ *et* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *des réels supérieurs à* 1, *on a*

$$n + \prod_{k=1}^{n} a_k \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Exercice 14.7 *Soit* n *un entier non nul, donner une formule simple (utilisant la fonction partie entière) pour déterminer le nombre de chiffres de* n.
Comment obtenir le premier chiffre et le dernier chiffre de n *(en utilisant la partie entière).*

Exercice 14.8 *Calculer, pour* $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $E\left(\dfrac{n + m}{2}\right) + E\left(\dfrac{n - m + 1}{2}\right)$

Exercice 14.9 *Montrer que pour* x *réel et* $n \geq 1$, *on a* $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$

Exercice 14.10 *Soit la fonction f définie par*

$$f(x) = E(2x) - 2E(x)$$

Calculer $f(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ puis pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq E(2x) - 2E(x) \leq 1$.

Exercice 14.11

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $E(x) + E(-x)$.*
2. *Soit $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible avec $q > 0$, montrer que*

$$\sum_{k=1}^{q-1} E\left(k\frac{p}{q}\right) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

On pourra utiliser le fait que si $a_1, \cdots, a_{n-1}$ sont $n-1$ réels alors $\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}$.

Exercice 14.12 *Soit $a \in \mathbb{R}$ que dire de la parité de l'entier $E\left(a + \frac{1}{2}\right) + E\left(a - \frac{1}{2}\right)$?*

Exercice 14.13 *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $E\left(x + \frac{1}{2}\right) + E(x+1) + E\left(2x + \frac{1}{2}\right) = E(4x+1)$.*

Exercice 14.14 *Montrer les résultats suivants (qui sont dans le cours, sans preuve)*

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $E(x+1) = E(x) + 1$.*
2. *Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \leq y \Longrightarrow E(x) \leq E(y)$ (i.e. la fonction $x \longmapsto E(x)$ est croissante)*

Exercice 14.15 *Soit $x \in \mathbb{R}$ comparer $E(x)$ et $E(-x)$.*

Exercice 14.16 *Montrer, en utilisant la caractérisation de la partie entière, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq E(2x) - 2E(x) \leq 1$.*

Exercice 14.17 *Soient x et y deux réels, montrer que $E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$. On posera $x = E(x) + a$ et $y = E(y) + b$, en précisant dans quel(s) intervalle(s) se trouvent a et b.*

Exercice 14.18 *Résoudre $E(2x+3) = E(x+2)$ (Indication, à l'aide de la caractérisation de la partie entière, déterminer un intervalle dans lequel se trouve les solutions, puis étudier les deux fonctions $x \longmapsto E(2x) + 1$ et $x \longmapsto E(x)$).*

2 Les techniques

Exercice 14.19 *Montrer que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{-2+\sqrt{5}} = 1$*

Exercice 14.20 *Montrer que $(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$.*

En déduire que si $n \geq 1$, on a $\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$

Exercice 14.21 *Soit n un entier supérieur ou égal à 3.*

1. *Montrer que $\forall k \in \langle 2, ..., n \rangle$, $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$*
2. *En déduire que $\forall k \in \langle 2, ..., n \rangle$, $\frac{C_n^k}{n^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$*

3. *Etablir alors que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq 3$

Exercice 14.22 *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right) = E(nx)$

Exercice 14.23 *On définit la fonction* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *par* $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$, *montrer que* $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$.

Exercice 14.24 *Soit* A *une partie non vide et bornée de* $\mathbb{R}$, *montrer que* $\displaystyle\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup A - \inf A$.

Exercice 14.25 *Résoudre* $xE(x) = x^2 - E(x)^2$.

Exercice 14.26 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, *on a* $E\left(\dfrac{n(n+1)}{2(2n-1)}\right) = E\left(\dfrac{n+1}{4}\right)$.

3 Les exotiques

Exercice 14.27 *Soient* $a = \dfrac{11\cdots 12}{11\cdots 13}$ *et* $b = \dfrac{11\cdots 14}{11\cdots 15}$ *où le nombre de* 1 *est égal à* 2002, *comparer* a *et* b

Exercice 14.28 *Soit* $u_n = n(2n+1)$, *et* $k \in \mathbb{N}$, *montrer qu'il existe un unique entier* n *tel que* $u_n \leq k < u_{n+1}$. *Calculer* n *en fonction de* k.

Exercice 14.29 *Soient* a, b, c *trois réels de* $[0,1]$, *montrer que l'un des trois réels* $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ *est inférieur ou ègal à* $\frac{1}{4}$.

Exercice 14.30 *Montrer que si* $x > 1$ *et* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *alors pour* $n \geq 1$, $E\left(\dfrac{E(nx)}{x}\right) = n-1$

Exercice 14.31 *On considère la suite* $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6 \ldots$.
Donner une formule simple pour calculer le énième terme.
(Indication, on note u_n *le énième terme de la suite. Soit* $k \in \mathbb{N}^*$ *donné, on pose* $f(k)$ *le premier rang pour lequel* $u_{f(k)} = k$ *(et donc* $u_{f(k)-1} = k-1$*). Calculer* $f(k)$ *puis chercher une CNS sur* n *pour que* $u_n = k$ *)*

Exercice 14.32 *Soient* $a < b$ *deux entiers tels que si les réels* x *et* y *sont dans l'intervalle* $[a,b]$ *alors* $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ *y est également. Déterminer* a *et* b.

Exercice 14.33 (Olympiades Panafricaines 2005) *Soit* $x \in \mathbb{R}$, *on définit* $\{x\} = x - E(x)$, *résoudre* $E(x)\{x\} = 2005x$.

Exercice 14.34 *Calculer la somme* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} E\left(\sqrt{k}\right)$ *(pour mémoire,* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(2n-1)(n-1)}{6}$*).*

Exercice 14.35 *Résoudre l'équation*

$$E\left(\frac{x+1}{3}\right) + E\left(\frac{x+2}{3}\right) = E\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{x-1}{2}$$

Exercice 14.36 *Comparer* $E\left(\sqrt{E(x)}\right)$ *et* $E(\sqrt{x})$ *pour* $x \geq 0$.

Exercice 14.37 *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}$ *où* $n \geq 1$. *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$.

4 Les olympiques

Exercice 14.38 *Montrer l'égalité*

$$\sqrt[3]{2000+1998+\sqrt{19980005}}+\sqrt[3]{2000+1998-\sqrt{19980005}}=\sqrt[3]{1999}$$

où $\sqrt[3]{x}$ *désigne l'unique réel dont le cube vaut* x.

Exercice 14.39 *Soient* a, b, c *trois réels compris entre* 0 *et* 1, *montrer que*

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab} \leq 2$$

Discuter le cas d'égalité.
Exercice posé dans la revue Tangente n°69.

Exercice 14.40 (Olympiades des pays Baltes (Baltic Way) 1995) *Soient* a, b, c *et* d *quatre réels strictement positifs, montrer que*

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a} \geq 4$$

Exercice 14.41 (The 1991 Asian Pacific Mathematical Olympiad) *Soient* $a_1, ..., a_n$ *et* $b_1, ..., b_n$ $2n$ *réels strictement positifs tels que* $a_1+a_2+\cdots+a_n = b_1+\cdots+b_n$, *montrer que*

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}$$

Exercice 14.42 (Olympiades Austro-polonaise 1996) *Les nombres réels* x, y, z *et* t *vérifient* $x+y+z+t=0$ *et* $x^2+y^2+z^2+t^2=1$.
Montrer que $-1 \leq xy+yz+zt+tx \leq 0$

Exercice 14.43 (Baltic Way 1995) *Soient* a, b, c *trois réels tels que* $|a| \geq |b+c|$, $|b| \geq |a+c|$ *et* $|c| \geq |a+b|$.
Montrer que $a+b+c=0$.

Exercice 14.44 (Baltic Way 1997) *Soient* $x_1, ..., x_n$ *des réels, on note* a *leur moyenne arithmétique, montrer que*

$$(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+...+(x_n-a)^2 \leq \frac{1}{2}\left(|x_1-a|+...+|x_n-a|\right)^2$$

Exercice 14.45 (Olympiades polonaises 1995) *Soient* a, b, c, d *quatre nombres irrationnels positifs tels que* $a+b=1$.
Montrer que $c+d=1 \iff \forall n \in \mathbb{N},\ E(na)+E(nb)=E(nc)+E(nd)$

Exercice 14.46 *Démontrez qu'il existe un unique réel* a *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(aE(na))-E(na)=n-1$$

On pourra utiliser l'exercice "les exotiques" 14.30.

Exercice 14.47 (Olympiades ex URSS) *Montrer que pour $n \geq 2$, on a*

$$E\left(\sqrt{n}\right) + E\left(\sqrt[3]{n}\right) + \cdots + E\left(\sqrt[n]{n}\right) = E\left(\log_2 n\right) + E\left(\log_3 n\right) + \cdots + E\left(\log_n n\right)$$

Exercice 14.48 (Adapté du Putnam 2007)

1. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\prod_{i=0}^{k-1}\left(E\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{n-i}{k}\right) = 0$$

2. *En déduire qu'il existe des polynômes $P_0\left(X\right), \cdots, P_{k-1}\left(X\right)$ (qui dépendent de k) tels que pour tout entier n dans $\mathbb{N}$*

$$E\left(\frac{n}{k}\right)^k = P_0\left(n\right) + E\left(\frac{n}{k}\right)P_1\left(n\right) + \cdots + E\left(\frac{n}{k}\right)^{k-1}P_{k-1}\left(n\right)$$

Les déterminer pour $k = 2$.

5 Le grenier

Exercice 14.49 *Résoudre $E\left(\sqrt{x}\right) = E\left(\dfrac{x}{2}\right)$.*

Chapitre 8
NOMBRES RÉELS

Solution des exercices

1 Les basiques

Exercice 8.1 $n! = \prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=\mathbf{2}}^{n} k$. *Or* $2 \leq k \leq n \Longrightarrow 2^{n-1} \leq \prod_{k=\mathbf{2}}^{n} k \leq n^{n-1}$

Exercice 8.2 $f(x) = x(2n - x)$ *est un trinôme du second degré a coefficient dominant positif, il est maximal lorsque* $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = n$. *D'où* $f(x) \leq f(n) = n^2$.
Remarque : *Retenir que le produit de deux nombres dont la somme est constante est maximal quand ces deux nombres sont égaux.*
Ensuite si $n \geq 2$, *on peut écrire*

$$(2n!) = 1 \times 2 \times \cdots \times 2n = 2n \times [(2n-1) \times 1] \times [(2n-2) \times 2] \times \cdots \times [(2n-(n-1)) \times (n-1)] \times n$$

d'où $(2n)! \leq 2n \times n^{2n-2} \times n = 2n^{2n}$. *L'inégalité est encore vraie si* $n = 0$ *ou* $n = 1$.

Exercice 8.3 $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+4} = 1 - \dfrac{2}{x^2+2x+4} \leq 1$.
Montrons que $\sup_{\mathbb{R}} f = 1$. *En effet* 1 *est bien un majorant de* f, *et si* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver* x *tel que* $1 - \varepsilon < 1 - \dfrac{3}{x^2+2x+4}$. *Il suffit de prendre* x *tel que* $x^2+2x+4 \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$ *ce qui est vrai dès que* $x > \dfrac{1}{2\varepsilon}$ *car* $x^2+2x+4 \geq 2x$.
Déterminons $\inf_{\mathbb{R}} f$. *Pour cela on minore* $1 - \dfrac{2}{x^2+2x+4}$, *on majore donc* $\dfrac{1}{x^2+2x+4}$, *ce qui en définitive revient à minorer* $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3$. *En conclusion* $f(x) \geq 1 - \dfrac{2}{3} = f(-1) = \dfrac{1}{3}$. *On a donc* $\min_{\mathbb{R}} f = f(-1) = \dfrac{1}{3} = \inf_{\mathbb{R}} f$.

Exercice 8.4

1. *On a* $2|x| = |(x+y)+(x-y)| \leq |x+y| + |x-y|$ *et* $2|y| = |(x+y)-(x-y)| \leq |x+y| + |x-y|$, *en sommant les deux inégalités, on a le double du résultat demandé.*
2. *On a* $(1+|x-1|)(1+|y-1|) = |x-1| + |y-1| + |x-1||y-1| + 1$. *Il s'agit donc de prouver que*

$$|xy-1| \leq |x-1| + |y-1| + |x-1||y-1| = |x-1| + |y-1| + |xy-x-y+1|$$

Ce qui s'écrit

$$|xy-1| - |xy-x-y+1| \leq |x-1| + |y-1|$$

ou encore

$$|xy-1| - |x+y-xy-1| \leq |x-1| + |y-1|$$

Or la seconde inégalité triangulaire donne

$$|a| - |b| \leq |a+b|$$

avec $a = xy - 1$, $b = x + y - xy - 1$, *on a* $a + b = xy - 1 + x + y - xy - 1 = (x - 1) + (y - 1)$ *d'où*

$$|xy - 1| - |x + y - xy - 1| \leq |(x - 1) + (y - 1)| \leq |x - 1| + |y - 1|$$

Exercice 8.5 $\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) = (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n)$

$= 1 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots) + (x_1x_2x_3 + \cdots) + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k + \underbrace{(\cdots)}_{>0}$.

En utilisant ce qui vient d'être prouvé, on a $\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} (1 + \underbrace{(a_k - 1)}_{=x_k}) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - 1) = 1 - n + \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Exercice 8.6 *Si* k *est le nombre de chiffre de* $n \in \mathbb{N}^*$, *alors*

$$10^{k-1} \leq n < 10^k \iff (k - 1) \ln(10) \leq \ln(n) \leq k \ln(10) \iff k - 1 \leq \frac{\ln(n)}{\ln(10)} = \ln_{10}(n) < k$$

Par définition, on a $k = E\left(\frac{\ln(n)}{\ln(10)}\right) + 1$.
Pour le dernier chiffre : si $n = a + 10b$ *où* a *est le dernier chiffre, alors* $b = E\left(\frac{n}{10}\right)$ *et* $a = n - 10 \times E\left(\frac{n}{10}\right)$.
Pour le premier chiffre, si n *à* $k = E\left(\frac{\ln(n)}{\ln(10)}\right) + 1$ *chiffres alors le premier chiffre est* $E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right) = E\left(\frac{n}{10^{E\left(\frac{\ln(n)}{\ln(10)}\right)}}\right)$

Exercice 8.7 *Si on examine quelques cas particuliers (le faire), on conjecture que le résultat vaut* n.
On sépare en deux cas, suivant la parité de $m + n$.
Si $m + n$ *est pair alors* $\frac{m+n}{2} \in \mathbb{Z}$ *et* $\frac{n-m}{2} = \frac{n+m}{2} - m \in \mathbb{Z}$.
Puisque $\frac{n-m}{2} \leq \frac{n-m+1}{2} \leq \frac{n-m}{2} + 1$, *on a* $E\left(\frac{n+m}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = \frac{n+m}{2} + \frac{n-m}{2} = n$. *On peut aussi utiliser le résultat suivant : si* $p \in \mathbb{Z}$, $E(p + x) = p + E(x)$, *avec* $p = \frac{n-m}{2} \in \mathbb{Z}$ *et* $x = \frac{1}{2}$.
Si $m + n$ *est impair alors* $\frac{m+n-1}{2} \in \mathbb{Z}$ *et* $\frac{n-m+1}{2} = \frac{n+m+1}{2} - m \in \mathbb{Z}$. *Puisque* $\frac{n+m-1}{2} \leq \frac{n+m}{2} \leq \frac{n+m}{2} + 1$ *on a* $E\left(\frac{n+m}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = \frac{n+m-1}{2} + \frac{n-m+1}{2} = n$.
Autre solution : *La fonction* $f(n) = E\left(\frac{n+m}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) - n$ *est* $2-$*périodique (c'est facile à vérifier), il suffit donc de vérifier que* $f(0) = f(1) = 0$. *Mais* $f(0) = E\left(\frac{m}{2}\right) + E\left(\frac{1-m}{2}\right)$ *est une fonction* $g(m)$ *qui est aussi* $2-$*périodique de la variable* m. *On vérifie donc que* $g(0) = E(0) + E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ *et que* $g(1) = E\left(\frac{1}{2}\right) + E(0) = 0$. *Puis* $f(1) = E\left(\frac{1+m}{2}\right) + E\left(\frac{1-m+1}{2}\right) - 1 = E\left(\frac{1+m}{2}\right) + E\left(\frac{-m}{2}\right)$ *est une autre fonction* $h(m)$ *qui est aussi* $2-$*périodique de la variable* m. *On termine donc en constatant que* $h(0) = E\left(\frac{1}{2}\right) + E(0) = 0$ *et* $h(1) = E(1) + E\left(\frac{-1}{2}\right) = 1 - 1 = 0$.

Exercice 8.8 *Posons* $X = \dfrac{E(nx)}{n}$, *on veut montrer que* $E(x)$ *est la partie entière de* X. *Ce qui revient à établir que* $E(x) \leq X < E(x) + 1$, *ce qui équivaut à*

$$nE(x) \leq E(nx) < nE(x) + n \tag{*}$$

Or

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \Longrightarrow nE(x) \leq nx < nE(x) + n \tag{1}$$

Par croissance de la partie entière, on a d'après (1)

$$nE(x) = E(nE(x)) \leq E(nx) \leq nx < nE(x) + n$$

Attention, *la croissance (non stricte) de la partie entière donne*

$$nE(x) = E(nE(x)) \leq E(nx) \boxed{\leq} nE(x) + n = E(nE(x) + n).$$

Remarque *1 : On peut aussi introduire* $i \in \mathbb{Z}$ *tel que* $E(nx) = nE(x) + i$, *alors* $E(x) \leq x < E(x) + 1 \Rightarrow nE(x) \leq$

$nx < nE(x) + n$ *donc* $0 \leq i < n$. *Puis* $E(x) \leq \dfrac{E(nx)}{n} = E(x) + \frac{i}{n} < E(x) + 1$ *donne le résultat.*

Remarque 2 : *Voici une autre preuve. Soit* $f(x) = E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) - E(x)$, *on a* $f(x+1) = E\left(\dfrac{E(nx+n)}{n}\right) - E(x+1) = E\left(\dfrac{E(nx)+n}{n}\right) - E(x) - 1 = E\left(\dfrac{E(nx)}{n} + 1\right) - E(x) - 1 = f(x)$. *La fonction* f *est donc* $1-$ *périodique.*
Puis si $0 \leq x < 1$, *on a* $0 \leq nx < n \Longrightarrow 0 \leq E(nx) \leq nx < n$ *d'où* $0 \leq \dfrac{E(nx)}{n} < 1$ *et ainsi* $f(x) = 0$ *sur* $[0,1[$. *La fonction* f *est* $1-$ *périodique et nulle sur* $[0,1[$, *elle est donc identiquement nulle.*

Exercice 8.9 *Si* $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$, *alors* $2x \in [0,1[$ *et* $f(x) = 0 - 0 = 0$, *si* $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$, *on a* $2x \in [1,2[$ *et* $f(x) = 1 - 0 = 1$.
Puis $f(x+1) = E(2x+2) - 2E(x+1) = E(2x) + 2 - 2E(x) - 2 = f(x)$, f *est donc* $1-$*périodique.*
Pour $x \in [0,1[$, *on a donc* $0 \leq E(2x) - 2E(x) \leq 1$, *par* $1-$*périodicité, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq E(2x) - 2E(x) \leq 1$$

Exercice 8.10

1. *Soit* $f(x) = E(x) + E(-x)$, *la fonction* f *est* $1-$*périodique car* $f(x+1) = E(x+1) + E(-x-1) = E(x) + 1 + E(-x) - 1 = f(x)$. *Or si* $x \in]0,1[$, *on a* $f(x) = 0 - 1 = -1$ *et* $f(0) = 0$ *ainsi* $f(x) = -1$ *sur* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *et* $f(n) = 0$ *si* $n \in \mathbb{Z}$.
   En conclusion $E(-x) = -E(x)$ *si* $x \in \mathbb{Z}$ *et* $E(-x) = -E(x) - 1$ *si* $x \notin \mathbb{Z}$.
2. *On utilise l'indication donnée,*

$$\sum_{k=1}^{q-1} E\left(k\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=1}^{q-1} E\left((q-k)\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=1}^{q-1} E\left(p - k\frac{p}{q}\right) = p(q-1) + \sum_{k=1}^{q-1} E\left(-k\frac{p}{q}\right)$$

   Ainsi

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{q-1} E\left(k\frac{p}{q}\right) &= \sum_{k=1}^{q-1} E\left(k\frac{p}{q}\right) + \sum_{k=1}^{q-1} E\left(-k\frac{p}{q}\right) + p(q-1) \\ &= p(q-1) + \sum_{k=1}^{q-1}(-1) \\ &= p(q-1) - (q-1) = (p-1)(q-1) \end{aligned}$$

   ce qui donne le résultat.

Exercice 8.11 *Si on pose* $f(a) = E\left(a + \dfrac{1}{2}\right) + E\left(a - \dfrac{1}{2}\right)$, *alors* $f\left(a + \dfrac{1}{2}\right) = 2E(a) + 1$ *est un nombre impair. Ainsi* $f(a) = 2E\left(a - \dfrac{1}{2}\right) - 1$ *est un entier impair !*

Exercice 8.12 *Soit* $f(x) = E\left(x + \frac{1}{2}\right) + E(x+1) + E\left(2x + \frac{1}{2}\right) - E(4x+1)$. *On a* $f(x) = E\left(x + \frac{1}{2}\right) + E(x) + E\left(2x + \frac{1}{2}\right) - E(4x)$.. *Pour* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{2}\right) &= E(x+1) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) + E\left(2x + 1 + \frac{1}{2}\right) - E(4x+2) \\ &= E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) + E\left(2x + \frac{1}{2}\right) - E(4x) = f(x) \end{aligned}$$

Ainsi f *est* $\dfrac{1}{2}$*-p&riodique. Il suffit de prouver que* $f = 0$ *sur* $\left[0, \frac{1}{2}\right[$. *Or si* $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[$, *on a*

$$\begin{aligned} E(x) &= 0,\ x + \frac{1}{2} \in \left[0, \frac{3}{2}\right[\Longrightarrow E\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ 2x + \frac{1}{2} &\in [0,1[\Longrightarrow E\left(2x + \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ et } 4x \in [0,1[\Longrightarrow E(4x) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[\Longrightarrow f(x) = 0$.
Puis si $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[$, *alors*

$$\begin{aligned} E(x) &= 0,\ x+\frac{1}{2} \in \left[\frac{3}{4}, 1\right[\Longrightarrow E\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0 \\ 2x+\frac{1}{2} &\in \left[1, \frac{3}{2}\right[\Longrightarrow E\left(2x+\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ et } 4x \in [1,2[\Longrightarrow E(4x) = 1 \end{aligned}$$

d'où $f(x) = 0$. *Conclusion* $f(x) = 0$ *sur* $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ *et par périodicité sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 8.13

Solution.

1. *On a* $E(x) + 1 \in \mathbb{Z}$ *et* $E(x) \leq x < E(x) + 1 \Longrightarrow E(x) + 1 \leq x + 1 < E(x) + 2$. *Ainsi* $E(x) + 1$ *vérifie la caractérisation de la partie entière pour* $x + 1$ *d'où* $E(x) + 1 = E(x+1)$.
2. *On a* $E(x) \leq x \leq y$ *ainsi* $E(x)$ *est un entier inférieur à* y, *il est donc inférieur à* $E(y)$.

Exercice 8.14 *On a* $E(x) \leq x < E(x)+1 \Longrightarrow -1-E(x) < -x \leq E(x)$. *Si* $x \in \mathbb{Z}$ *alors* $E(x) = x$ *et* $E(-x) = -x$. *Si* $x \in \mathbb{R}$ *et* $x \notin \mathbb{Z}$ *alors*

$$-1 - E(x) < -x < E(x) \Longrightarrow p \leq -x < p+1 \text{ où } p = -1 - E(x) \in \mathbb{Z}$$

On en déduit que $E(-x) = -1 - E(x)$.

Exercice 8.15 *On a*

$$\begin{aligned} 2x - 1 &< E(2x) \leq 2x \\ x - 1 &< E(x) \leq x \Longrightarrow -2x \leq -2E(x) < 2 - 2x \end{aligned}$$

En sommant, il vient

$$-1 < E(2x) - 2E(x) < 2$$

Mais puisque $E(2x) - 2E(x)$ *est un entier, on a* $0 \leq E(2x) - 2E(x) \leq 1$.
Autre preuve avec la périodicité, $f(x) = E(2x) - 2E(x)$ *est de période* 1, *nulle sur* $\left[0, \frac{1}{2}\right[$, *égale à* 1 *sur* $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

Exercice 8.16 *Puisque* $E(x) \leq x < E(x) + 1$ *on a* $a \in [0, 1[$. *Mais*

$$\begin{aligned} E(x+y) &= E(E(x) + E(y) + a + b) = E(x) + E(y) + E(a+b) \\ E(2x) &= E(2E(x) + 2a) = 2E(x) + E(2a) \\ E(2y) &= E(2E(y) + 2b) = 2E(y) + E(2b) \end{aligned}$$

Il s'agit donc de prouver que

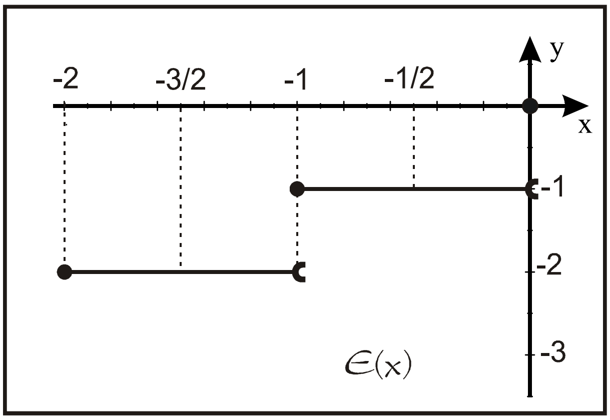
$$E(a+b) \leq E(2a) + E(2b)$$

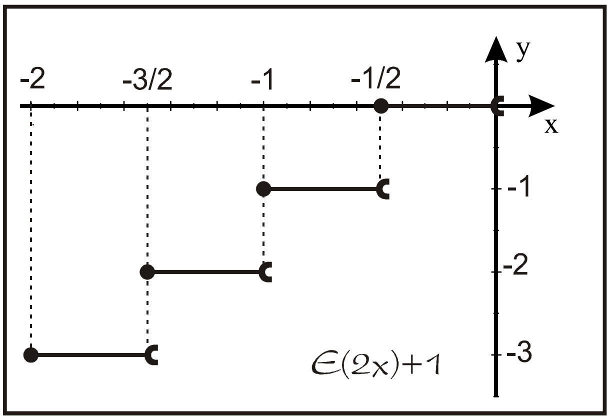
On distingue quatre cas :
Si $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ *et* $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ *alors* $a+b$, $2a$ *et* $2b$ *sont dans* $[0,1[$. *Ainsi* $E(a+b) = 0 \leq E(2a) + E(2b) = 0 + 0$.
Si $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ *et* $b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ *alors* $a+b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, $2a \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ *et* $2b \in [1,2[$ *Ainsi* $E(a+b) = 0 \leq E(2a) + E(2b) = 0 + 1$.
Si $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ *et* $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, *on est ramené au cas précédent par échange des rôles.*
Si $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ *et* $b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ *alors* $a+b$, $2a$ *et* $2b$ *sont dans* $[1,2[$. *Ainsi* $E(a+b) = 1 \leq E(2a) + E(2b) = 1 + 1 = 2$.

Exercice 8.17 *On a* $2x + 3 - 1 < E(2x+3) = E(x+2) \leq x + 2 \Longrightarrow 2x + 2 < x + 2 \Longrightarrow x < 0$. *De même* $x + 2 - 1 < E(x+2) = E(2x+3) \leq 2x + 3$ *ainsi* $x + 1 < 2x + 3$, *d'où* $x > -2$. *On a donc*

$$x \in I =]-2, 0[$$

L'équation est équivalente à $E(2x)+1=E(x)$, sur cet intervalle, on étudie les deux courbes des fonctions $f(x)=E(2x)+1$ et $g(x)=E(x)$ dont voici les graphes.





L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S}=\left[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right[$$

2 Les techniques

Exercice 8.18 *Notons $\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta=\sqrt[3]{-2+\sqrt{5}}$. On cherche $x=\alpha-\beta$, or $\alpha^3-\beta^3=4$ et $\alpha\beta=1$. Mais $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$ d'où $x^3+3x-4=(x-1)\left(x^2+x+4\right)=0$. La seule solution réelle est $x=1$*

Exercice 8.19 $(n!)^2=\left(\prod\limits_{k=1}^{n}k\right)\left(\prod\limits_{k=1}^{n}k\right)$ *dans le deuxième produit, on pose $k=n-j+1$, alors $1\leq k\leq n\Leftrightarrow 1\leq j\leq n$, donc $\prod\limits_{k=1}^{n}k=\prod\limits_{j=1}^{n}n-j+1=\prod\limits_{k=1}^{n}n-k+1$.*
Puis $\sqrt{n}\leq\sqrt[n]{n!}\leq\dfrac{n+1}{2}\Leftrightarrow(\sqrt{n})^{2n}\leq\left(\sqrt[n]{n!}\right)^{2n}\leq\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n}$ car les nombres sont positifs.
On doit donc établir que

$$n^n\leq(n!)^2\ \text{ et }\ (n!)^2\leq\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Il suffit de montrer que si $n\geq 1$ et $k\in\{1,..,n\}$,

$$n\leq k(n-k+1)\leq\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

En effet

$$n\leq k(n-k+1)\Leftrightarrow n-k(n-k+1)\leq 0\Leftrightarrow k^2-k(n+1)+n\leq 0$$

et les racines de $P(X)=X^2-X(n+1)+n=0$ sont $X=n$ et $X=1$. Ainsi $P(k)\leq 0$ pour $1\leq k\leq n$ (signe d'un trinôme à l'intérieur des racines).
De même

$$k(n-k+1)\leq\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\Leftrightarrow k(n-k+1)-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\leq 0\Leftrightarrow k^2-k(n+1)+\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\geq 0$$

et $X^2-X(n+1)+\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(n-2X+1)^2\geq 0$.
Retenir que pour encadrer un produit de nombres positifs, on cherche le facteur le plus petit et le facteur le plus grand (même technique que pour une somme).

Remarque : *la fonction* $f(x) = x(n+1-x)$ *représente une parabole dont la concavité est tournée vers le bas. Son sommet est en* $x = \dfrac{n+1}{2}$*, son axe* $x = \dfrac{n+1}{2}$*, sur l'intervalle* $[1, n]$*, son minimum est donc* $f(1) = f(n) = n$ *et son maximum est* $f\left(\dfrac{n+1}{2}\right) = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$.

Exercice 8.20 1. $\forall j \in \langle 2, ..., k\rangle$, *on a* $0 < 2 \leq j$ *donc (les nombres sont positifs) on a*

$$0 < \prod_{j=2}^{k} 2 = 2^{k-1} \leq \prod_{j=2}^{k} j = \prod_{j=1}^{k} j = k!.$$

2^{k-1} *et* $k!$ *sont positifs, leurs inverses sont donc tels que* $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

2. $\forall k \in \langle 2, ..., n\rangle$, $\dfrac{C_n^k}{n^k} = \dfrac{1}{k!}\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}$,
or $\forall j \in \langle 2, ..., k-1\rangle$, $0 < (n-j) \leq n$ *donc*

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1}(n-j) \leq \prod_{j=0}^{k-1} n = n^{k-1}$$

On en déduit que $\dfrac{C_n^k}{n^k} = \dfrac{1}{k!}\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \leq \dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

3. *Si* $\boxed{n \geq 3}$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k}$
Or $\forall k \in \langle 2, ..., n\rangle$, $\dfrac{C_n^k}{n^k} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$ *donc*

$$\sum_{k=2}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \underset{j=k-1}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$$

On a utilisé :

$$\textit{Si } q \geq p \textit{ et } a \neq 1, \sum_{k=p}^{q} a^k = a^p \sum_{k=p}^{q} a^{k-p} \underset{j=k-p}{=} a^p \sum_{j=0}^{q-p} a^j = a^p \frac{1-a^{q+1-p}}{1-a}$$

On en déduit que Si $\boxed{n \geq 3}$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq 3$.
On vérifie que $\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1 = 2 \leq 3$, $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} \leq 3$.

Exercice 8.21 *Soit* $y = x - E(x)$*. On a* $0 \leq y < 1$*,on note* i *tel que* $E(ny) = i$ *alors*

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & i < n \\ E(nx) & = & E(nE(x) + ny) = nE(x) + i \end{array}$$

De plus

$$i \leq ny < i+1 \Longleftrightarrow \frac{i}{n} \leq y < \frac{i+1}{n}$$

Pour $0 \leq k \leq n-1$ *tel que* $i+k+1 \leq n$ *on a*

$$x + \frac{k}{n} = E(x) + y + \frac{k}{n}$$

$$\Longrightarrow E(x) \leq x + \frac{k}{n} < E(x) + \frac{i+k+1}{n} \leq E(x) + 1$$

d'où $E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(x)$
Pour $0\le k\le n-1$ *tel que* $i+k+1\ge n+1\iff i+k\ge n$,

$$E(x)+1\le x+\frac{k}{n}<x+1\le E(x)+2$$

d'où $E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(x)+1$.
Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)=(n-i)\,E(x)+i\,(E(x)+1)=nE(x)+i=E(nx)$$

Autre preuve (bien plus élégante !) : Soit $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)-E(nx)$, *alors*

$$\begin{aligned}
f\left(x+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{1}{n}+\frac{k}{n}\right)-E(nx+1)=\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k+1}{n}\right)-E(nx)-1\\
&= \sum_{k=1}^{n}E\left(x+\frac{k}{n}\right)-E(nx)-1=E(x+1)+\sum_{k=1}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)-E(nx)-1\\
&= E(x)+1+\sum_{k=1}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)-E(nx)-1=E\left(x+\frac{0}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)-E(nx)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)-E(nx)=f(x)
\end{aligned}$$

ainsi la fonction f *est* $\dfrac{1}{n}$ *périodique, il suffit de prouver qu'elle est nulle sur l'intervalle* $\left[0,\dfrac{1}{n}\right[$. *Mais*

$$\left.\begin{array}{c}0\le x<\dfrac{1}{n}\\ 0\le k\le n-1\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{c}0\le x<\dfrac{1}{n}\\ 0\le\dfrac{k}{n}\le 1-\dfrac{1}{n}\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{c}0\le nx<1\\ 0\le x+\frac{k}{n}<1\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{c}E\left(x+\frac{k}{n}\right)=0\\ E(nx)=0\end{array}\right\}$$

d'où

$$f(x)=0 \text{ sur } \left[0,\frac{1}{n}\right[$$

et par périodicité on a $f=0$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 8.22 *On a* $g(x+y)=\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|}\le\dfrac{|x|}{1+|x+y|}+\dfrac{|y|}{1+|x+y|}$, *malheureusement on a bien* $\dfrac{|x|}{1+|x|+|y|}\le\dfrac{|x|}{1+|x+y|}$ *mais rien ne permet de dire que* $\dfrac{|x|}{1+|x+y|}\le\dfrac{|x|}{1+|x|}$. *Cependant,*

$$g(x+y)=\frac{|x+y|}{1+|x+y|}=\frac{|x+y|+1-1}{1+|x+y|}=1-\frac{1}{1+|x+y|}$$

$$1+|x+y|\le 1+|x|+|y|\Longrightarrow 1-\frac{1}{1+|x+y|}\le 1-\frac{1}{1+|x|+|y|}=\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}$$

d'où

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\le\frac{|x|}{1+|x|+|y|}+\frac{|y|}{1+|x|+|y|}\le\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|x|}$$

Exercice 8.23 *Notons* $M=\sup A$ *et* $m=\inf A$ *qui existent car* A *est non vide et bornée. Soit* $(x,y)\in A^2$, *on a* $m\le x\le M$ *et* $m\le y\le M$, *donc* $m-M\le x-y\le M-m$, *soit*

$$|x-y|\le M-m$$

en passant au sup, on a

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| \leq M-m$$

(et le sup existent, car la partie $B = \{|x-y|, x\in A, y\in A\}$ *est non vide bornée par* $M-m$*). Reste à prouver que* $M-m$ *est bien le sup.*
Soit M_1 *un majorant de* B*, alors pour tout* $(x,y)\in A^2$*, on a* $x-y \leq |x-y| \leq M_1 \Longrightarrow x \leq M_1+y$*. Donc*

$$\forall y \in A,\ M \leq M_1+y \Longrightarrow \forall y\in A,\ M-M_1 \leq y$$

On en déduit que

$$M-M_1 \leq m \Longrightarrow M-m \leq M_1$$

donc $M-m$*. est bien le plus petit des majorants de* B*, il s'agit bien de la borne sup de* B*.*

Exercice 8.24 *Soit* $x\in\mathbb{R}$*, posons* $n = E(x) \in \mathbb{Z}$ *et* $\alpha = x - E(x) \in [0,1[$*, ainsi* $x = n+\alpha$*. On veut donc résoudre Résoudre* $xE(x) = x^2 - E(x)^2$*, ce qui équivaut à*

$$\alpha^2 + n\alpha - n^2 = 0 \Longleftrightarrow \alpha(n+\alpha) = n^2 \geq 0$$

On distingue deux cas :
Premier cas $\alpha = 0 \Longleftrightarrow n = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *qui est solution.*
Second cas $\alpha \neq 0 \Longleftrightarrow n+\alpha = \dfrac{n^2}{\alpha} > 0$*, or*

$$n \leq n+\alpha < n+1$$

d'où

$$n+1 > 0 \Longrightarrow n \geq 0 \Longrightarrow n \geq 1 \text{ (on a } n\neq 0 \text{ car sinon } \alpha = 0)$$

mais alors

$$0 < \alpha n \leq n(n+\alpha) = n^2 < \alpha(n+1) < n+1 \Longrightarrow 0 < n^2 < n+1 \Longrightarrow 1 \leq n^2 \leq n$$

d'où $n^2 - n \leq 0$*, ce qui impose* $n = 1$*. On en déduit que* $\alpha^2 + a - 1 = 0$ *dont l'unique solution dans* $[0,1[$ *est* $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$*. Ainsi*

$$x = n+\alpha = 1+\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Exercice 8.25 *On a* $\dfrac{n(n+1)}{2(2n-1)} - \dfrac{n+1}{4} = \dfrac{1}{4}\dfrac{n+1}{2n-1}$ *ainsi*

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2(2n-1)} &= \frac{n+1}{4} + \frac{1}{4}\frac{n+1}{2n-1} \\ \text{et } \frac{1}{4}\frac{n+1}{2n-1} - \frac{1}{4} &= -\frac{1}{4}\frac{n-2}{2n-1} \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \dfrac{1}{4}\dfrac{n+1}{2n-1}$*, on a donc montré que pour* $n \geq 3$*, on a* $0 < \alpha < \dfrac{1}{4}$*. Pour conclure, on pose* $a = E\left(\dfrac{n(n+1)}{2(2n-1)}\right) = E\left(\dfrac{n+1}{4} + \alpha\right)$ *et* $b = E\left(\dfrac{n+1}{4}\right)$*. Si* $n = 4p+q$*, avec* $q \in \{0,1,2,3\}$ *alors* $\dfrac{n+1}{4} = p + \dfrac{q}{4}$ *et* $\dfrac{n+1}{4} + \alpha = p + \left(\dfrac{q}{4} + \alpha\right)$*,* $b = p = a$ *et* $a = E\left(p + \left(\dfrac{q}{4}+\alpha\right)\right) = p + E\left(\dfrac{q}{4}+\alpha\right) = p$ *car* $\dfrac{q}{4} < \dfrac{1}{4} + \alpha < \dfrac{q+1}{4} < 1$*.*

3 Les exotiques

Exercice 8.26 *Notons* $\alpha = 11\cdots 12$*,* $a = \frac{\alpha}{\alpha+1}$*,* $b = \frac{\alpha+2}{\alpha+3}$*. Il suffit de déterminer le signe de* $a - b = \frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{\alpha+2}{\alpha+3} = -\frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+3)} < 0$*.Ainsi* $a < b$*.*
Une bonne technique en Maths : Nommer les protagonistes de l'histoire, personne ne manipule des nombres à 2003 *chiffres !*

Exercice 8.27 *L'existence de n provient de la stricte croissance de la suite $(u_n)_n$. On peut également l'établir en le calculant. On veut avoir*

$$n(2n+1) \le k \text{ et } k < (n+1)(2n+3)$$

L'équation $n(2n+1) - k = 0$, admet comme racines $x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1+8k}$ et $x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{1+8k} < 0$ (une des deux racines est négative car le produit $x_1 x_2 = -k$ et il est clair que $x_2 \le x_1$).
Ainsi

$$n(2n+1) \le k \iff x_2 \le 0 \le n \le x_1$$

L'équation $(n+1)(2n+3) - k = 0$ admet deux racines qui valent $x_1 - 1$ et $x_2 - 1$.
Ainsi

$$k < (n+1)(2n+3) \iff n > x_1 - 1$$

On doit donc avoir

$$x_1 - 1 < n \le x_1 \iff n \le x_1 < n+1 \iff n = E(x_1)$$

Conclusion

$$n = E\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1+8k}\right)$$

Exercice 8.28 *Par l'absurde, si les trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ sont strictement supérieur à $\frac{1}{4}$, alors leur produit vérifie $a(1-a)b(1-b)c(1-c) > \frac{1}{8}$. Mais si $x \in [0,1]$ alors $x(1-x) \le \frac{1}{4}$ (parabole dont le somment est en $x = \frac{1}{2}$, plus généralement on retient ce résultat ainsi : le produit de deux nombres dont la somme est constante est maximal quand ces nombres sont égaux), donc $a(1-a)b(1-b)c(1-c) \le \frac{1}{8}$.*

Exercice 8.29 *On a $nx - 1 < E(nx) \le nx \underset{(x>1)}{\Rightarrow} n - 1 < n - \frac{1}{x} < \frac{E(nx)}{x} \le n \Rightarrow n - 1 \le E\left(\frac{E(nx)}{x}\right) \le n$. Mais si $E\left(\frac{E(nx)}{x}\right) = n$ alors $n \le \frac{E(nx)}{x}$ et nécessairement $\frac{E(nx)}{x} = n \Rightarrow x = \frac{E(nx)}{n} \in \mathbb{Q}$*

Exercice 8.30 *Notons u_n le énième terme de la suite.et $f(k)$ le premier rang où $u_{f(k)} = k$. Par exemple, $f(4) = 7$ car $u_6 = 3$ et $u_7 = 4$. Quelques minutes de réflexion suffisent pour se convaincre que $f(k) = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} i = 1 + \frac{k(k-1)}{2}$*
On a donc

$$\begin{aligned} u_n &= k \iff f(k) \le n < f(k+1) = f(k) + k \\ u_n &= k \iff 1 + \frac{k(k-1)}{2} \le n < 1 + \frac{k(k+1)}{2} \end{aligned}$$

Mais $1 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{8}$ et $1 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{8}$
Ainsi

$$\begin{aligned} u_n &= k \iff \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \le n - \frac{7}{8} < \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \\ u_n &= k \iff \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \le 2n - \frac{7}{4} < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \\ u_n &= k \iff \sqrt{2n - \frac{7}{4}} - \frac{1}{2} < k \le \sqrt{2n - \frac{7}{4}} + \frac{1}{2} \\ &\iff k = E\left(\sqrt{2n - \frac{7}{4}} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

En conclusion $u_n = E\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2n - \frac{7}{4}}\right)$

Exercice 8.31 *Avec* $x = y = a$*, on obtient* $a \leq \dfrac{2}{a} \leq b$ *donc* $a^2 \leq 2$ *et* $2 \leq ab$*. Mais avec* $x = y = b$*, il vient* $a \leq \dfrac{2}{b} \leq b$ *donc* $b^2 \geq 0$ *et* $ab \leq 2$*. On en déduit que* $ab = 2$*. Puisque* a *et* b *sont entiers,on a* $a = 1$ *et* $b = 2$*. Réciproquement si* $1 \leq x \leq 2$ *et* $1 \leq y \leq 2$ *alors* $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{x} \leq 1$ *et* $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{y} \leq 1$ *d'où* $1 \leq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \leq 2$.

Plus généralement si on n'impose pas a *et* b *d'être entiers, on trouve les intervalles de la forme* $\left[a, \dfrac{2}{a}\right]$ *où* $a \leq \sqrt{2}$.

Exercice 8.32 *Avant tout, remarquons que, puisque* $E(x) \leq x < E(x) + 1$*, on a* $0 \leq \{x\} < 1$*. Posons alors* $x = n + \{x\}$ *où* $n = E(x)$*. On désire résoudre* $n\{x\} = 2005(n + \{x\})$ *ce qui donne*

$$\begin{aligned} \{x\} &= \frac{2005n}{n-2005} \\ \text{avec } 0 &\leq \{x\} < 1 \end{aligned}$$

La fonction $f(n) = \dfrac{2005n}{n-2005} = 2005\dfrac{n-2005+2005}{n-2005} = 2005\left(1 + \dfrac{2005}{n-2005}\right) = 2005 + \dfrac{2005^2}{n-2005}$ *est supérieure à* 2005 *pour* $n > 2005$*. Elle est décroissante sur l'intervalle* $]-\infty, 2005[$*, puisque* $f\left(-\dfrac{2005}{2004}\right) = 1$ *et que* $f(0) = 0$*, on en déduit que* $n \in \left[-\dfrac{2005}{2004}, 0\right]$ *donc ou bien*

$$n = 0,\ \{x\} = 0 \text{ et } x = 0$$

ou bien

$$\begin{aligned} n &= E(x) = -1 \\ \{x\} &= \frac{-2005}{-1-2005} = -1 + \frac{1}{2006} \\ x &= -\frac{1}{2006} \end{aligned}$$

Exercice 8.33 *Puisque* $E(x) \leq x < E(x) + 1$*, on a* $0 \leq \{x\} < 1$*. On pose donc* $x = n + \{x\}$ *où* $n = E(x) \in \mathbb{Z}$*. On désire donc résoudre* $n\{x\} = 2005(n + \{x\},)$ *ce qui donne*

$$\{x\} = \frac{2005n}{n-2005} \text{ avec } 0 \leq \{x\} < 1$$

La fonction f *définie par* $f(n) = \dfrac{2005n}{n-2005} = 2005 + \dfrac{2005^2}{n-2005}$ *est supérieure à* 2005 *pour* $n > 2005$*. Elle est décroissante sur* $]-\infty, 2005[$*,* $f\left(-\dfrac{2005}{2004}\right) = 1$ *et* $f(0) = 0$ *ainsi* $n \in \left[-\dfrac{2005}{2004}, 0\right]$*. On a donc deux possibilités :*

$$n = 01,\ \{x\} = 0 \text{ et } x = 0$$

ou

$$\begin{aligned} n &= E(x) = -1 \\ \{x\} &= \frac{-2005}{-1-2005} = -1 + \frac{1}{2006} \\ x &= -\frac{1}{2006} \end{aligned}$$

Exercice 8.34 *Dans la somme* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} E\left(\sqrt{k}\right)$*, on va faire des paquets de taille variable sur lesquels* $E\left(\sqrt{k}\right)$ *est constant. Puisque* k *varie de* 1 *à* n^2*, on a* $\sqrt{k}$ *entre* 1 *et* n *et ainsi* $E\left(\sqrt{k}\right)$ *varie entre* 1 *et* n*. On cherche donc* *quand* $E\left(\sqrt{k}\right) = i$ *pour* i *fixé entre* 1 *et* n. *Puisque*

$$E\left(\sqrt{k}\right) = i \leq \sqrt{k} < E\left(\sqrt{k}\right) + 1 = i + 1$$

cela impose

$$i^2 \leq k < i^2 + 2i + 1 \iff i^2 \leq k \leq i^2 + 2i$$

Pour résumer, pour $k \in \left[1^2, 1^2 + 2 \times 1\right] = [1,3]$, *on a* $E\left(\sqrt{k}\right) = 1$ *; pour* $k \in \left[2^2, 2^2 + 2 \times 2\right] = [4,8]$, *on a* $E\left(\sqrt{k}\right) = 2$ *;* $\cdots$ *pour* $k \in \left[(n-1)^2, (n-1)^2 + 2(n-1)\right]$ *on a* $E\left(\sqrt{k}\right) = n - 1$ *et enfin pour* $k = n^2$, *on a* $E\left(\sqrt{k}\right) = n$.
Ceci dit, il vient donc en sommant par paquets

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n^2} E\left(\sqrt{k}\right) &= n + \sum_{i=1}^{n-1} i(2i+1) \\ &= n + 2\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i \\ &= \frac{n\left(4n^2 - 3n + 5\right)}{6} \end{aligned}$$

Exercice 8.35 *Puisque* $\dfrac{x-1}{2} = E\left(\dfrac{x+1}{3}\right) + E\left(\dfrac{x+2}{3}\right) - E\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$, *on a* $\dfrac{x-1}{2} \in \mathbb{Z}$ *et ainsi* $\dfrac{x-1}{2} + 1 = \dfrac{x+1}{2}$ *est également un entier.*
Pour résumer, on a

$$x \text{ entier, } \frac{x-1}{2} \text{ et } \frac{x+1}{2} \text{ entiers.}$$

Cela impose à x *d'être impair.*
L'équation s'écrit alors

$$E\left(\frac{x+1}{3}\right) + E\left(\frac{x+2}{3}\right) = \frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2} = x$$

ce qui prouve que x *est entier. La fonction* f *définie sur* $\mathbb{Z}$ *par* $f(x) = E\left(\dfrac{x+1}{3}\right) + E\left(\dfrac{x+2}{3}\right) - x$ *vérifie*

$$\begin{aligned} f(x+3) &= E\left(\frac{x+3+1}{3}\right) + E\left(\frac{x+3+2}{3}\right) - x - 3 \\ &= E\left(\frac{x+1}{3} + 1\right) + E\left(\frac{x+2}{3} + 1\right) - x - 3 \\ &= f(x) - 1 \end{aligned}$$

Puisque $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, *on en déduit que* 1 *est la seule solution. En effet* f *est constante égale à* $-k$ *sur l'intervalle* $[0 + 3k, 2 + 3k]$ *où* $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8.36 *Soit* $x > 0$ *fixé, posons* $n = E(x)$ *et* $x = n + \{x\}$ *où* $\{x\} \in [0,1[$. *On doit comparer* $E(\sqrt{n})$ *et* $E\left(\sqrt{n + \{x\}}\right)$. *Il s'agit maintenant de placer* n *par rapport aux carrés. Puisque la suite* $\left(k^2\right)_{k \in \mathbb{N}}$ *est strictement croissante, il existe un unique entier* k *tel que*

$$k^2 \leq n < (k+1)^2 \iff k^2 \leq n \leq k^2 + 2k$$

(cet entier est $k = E(\sqrt{n})$ *comme on va le voir), posons alors* $n = k^2 + m$ *où* $0 \leq m \leq 2k$. *On a alors*

$$k \leq \sqrt{n} < k + 1 \Longrightarrow E\left(\sqrt{n}\right) = k$$

$$\left.\begin{array}{c} k^2 \leq n \leq k^2 + 2k \\ 0 < \{x\} < 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow k^2 \leq n + \{x\} \leq k^2 + 2k + \{x\} < k^2 + 2k + 1$$

donc
$$k \leq \sqrt{n+\{x\}} < k+1 \Longrightarrow E\left(\sqrt{n+\{x\}}\right) = k$$
En conclusion, pour $x \geq 0$, on a
$$E\left(\sqrt{E(x)}\right) = E\left(\sqrt{x}\right)$$

Exercice 8.37 *On a*
$$\begin{aligned}\frac{1}{u_n} &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}} = \frac{\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}-\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} \\ &= n\frac{\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}-\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}}{4}\end{aligned}$$
Or
$$\begin{aligned}\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}-\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} &= \frac{1}{n}\left(\sqrt{2n^2+2n+1}-\sqrt{2n^2-2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\sqrt{2(n+1)^2-2(n+1)+1}-\sqrt{2n^2-2n+1}\right)\end{aligned}$$
Ainsi
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2(k+1)^2-2(k+1)+1}-\sqrt{2k^2-2k+1}\right)$$
Il s'agit donc d'une somme telescopique, qui vaut
$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{2n^2+2n+1}-1\right)$$

4 Les olympiques

Exercice 8.38 *Posons $\alpha = \sqrt[3]{3998+\sqrt{19980005}}$, $\beta = \sqrt[3]{3998-\sqrt{19980005}}$ et $x = \alpha+\beta$.*
Alors $\alpha^3+\beta^3 = 2\times(2000+1998) = 4\times 1999$ (car $2000+1998 = 1999+1999$)
et $\alpha\beta = \sqrt[3]{3998^2-19980005} = \sqrt[3]{-3996\,001}$.
On a donc $x^3 = (\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 7996+3x\sqrt[3]{-3996\,001}$. Ainsi x est racine du polynôme $P(X) = X^3+3\sqrt[3]{3996\,001}X-7996 = 0$. Ce polynôme admet une unique racine réelle. En effet sa dérivée $P'(X) = 3X^2+3\sqrt[3]{3996\,001}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. P est donc strictement croissant, il réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim_{x\to-\infty}P(x), \lim_{x\to+\infty}P(x)\right[= \mathbb{R}$.
Or $P\left(\sqrt[3]{1999}\right) = 1999+3\sqrt[3]{1999\times 3996\,001}-7996 = 1999+3\sqrt[3]{7988\,005\,999}-7996$. Et (miracle) $7988\,005\,999 = 1999^3$ ce qui permet de conclure que $x = \sqrt[3]{1999}$.
Remarque 1 :
On peut simplifier la solution en remarquant que $199800005 = 5\times(1999)^2$, ainsi
$\sqrt[3]{2000+1998+\sqrt{19980005}}+\sqrt[3]{2000+1998-\sqrt{19980005}} =$
$\sqrt[3]{2\times 1999+\sqrt{5\times(1999)^2}}+\sqrt[3]{2\times 1999-\sqrt{5\times(1999)^2}} = \sqrt[3]{1999}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$. *On est donc ramené à prouver que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$. On utilise alors le même genre de technique. On pose $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, $x = \alpha+\beta$. Alors $x^3 = 4-3x$ dont l'unique racine réelle est $x = 1$ (car $X^3+3X-4 = (X-1)\left(X^2+X+4\right)$).*
Remarque 2 :

Plus généralement le réel $x = \sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$ *est solution de l'équation* $x^3 + 3\sqrt[3]{b-a^2}x - 2a = x^3 + px + q$ *où* $p = 3\sqrt[3]{b-a^2}$ *et* $q = -2a$.
Réciproquement, soit l'équation $x^3 + px + q$, *posons* $a = \frac{-q}{2}$ *et* $b = a^2 + \frac{p^3}{27} = \frac{4p^3+27q^2}{108}$. *Si* $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ *(le discriminant) est positif, le nombre réel* $x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{108}}}$ *(formule de Cardan) est racine de* $x^3 + px + q$. *(En fait on peut montrer que si* $\Delta > 0$, *l'équation* $x^3 + px + q$ *n'a qu'une seule racine réelle). Enfin l'équation* $y^3 + uy^2 + vy + w$ *se ramène à* $x^3 + px + q$ *en posant* $y = x - \frac{u}{3}$ *(et* $p = v - \frac{1}{3}u^2$, $q = \frac{2}{27}u^3 - \frac{1}{3}vu + w$ *)*
Remarque 3 :
Le quatrième exercice du sujet du concours ESTP-ENSAM 1999 (Banque de notes ECRIN et ISEP) était le suivant : Simplifier l'écriture des deux nombres réels définies par

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{-7+5\sqrt{2}} \text{ et } \sqrt[3]{\frac{13+5\sqrt{17}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-13+5\sqrt{17}}{2}}$$

(Nota Bene : on pourra rechercher, pour chaque cas, une équation du troisième degré vérifiée par ce nombre).
Pour information : $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{-7+5\sqrt{2}} = 2$ *et* $\sqrt[3]{\frac{13+5\sqrt{17}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-13+5\sqrt{17}}{2}} = 1$ *et plus généralement, pour* $p \geq -\frac{5}{3}$,
$\sqrt[3]{(3p+2) + \sqrt{(p+1)^2(8p+5)}} + \sqrt[3]{(3p+2) - \sqrt{(p+1)^2(8p+5)}} = 1$
et pour $p \geq -1$, $\sqrt[3]{(3p+4) + \sqrt{(p+1)(p+4)^2}} + \sqrt[3]{(3p+4) - \sqrt{(p+1)(p+4)^2}} = 2$

Exercice 8.39 *On peut supposer que* $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$, *puisque* $0 \leq (1-a)(1-b)$, *on a* $a + b \leq 1 + ab \leq 1 + 2ab$ *et par suite* $a + b + c \leq a + b + 1 \leq 2(1+ab)$.
On en déduit que $\dfrac{a}{1+bc} + \dfrac{b}{1+ac} + \dfrac{c}{1+ab} \leq \dfrac{a}{1+ba} + \dfrac{b}{1+ab} + \dfrac{c}{1+ab} \leq 2.$
On peut se demander quand se présente le cas d'égalité. Il faut que les égalités suivantes soient vérifiées :
$0 = (1-a)(1-b)$, $1 + ab = 1 + 2ab$, $a + b + c = a + b + 1$ *et* $\dfrac{a}{1+bc} + \dfrac{b}{1+ac} = \dfrac{a}{1+ba} + \dfrac{b}{1+ab}$, *ce qui impose à a d'être nul et à b et c d'être égaux à 1*

Exercice 8.40 *Notons* $f(a,b,c,d) = \frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a}$. *La présence du 4 nous donne deux voies à explorer :*
4 c'est le nombre de termes de la somme, on peut penser utiliser l'inégalité $\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \leq \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, *il suffit donc de prouver que* $\frac{a+c}{a+b} \times \frac{b+d}{b+c} \times \frac{c+a}{c+d} \times \frac{d+b}{d+a} \geq 1$, *malheureusement le produit ne se simplifie pas et il n'est pas toujours plus grand que 1.*
L'autre voie est de se souvenir que $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ *pour tout entier* x. *On peut ensuite un peu simplifier la résolution en remarquant que* f *est homogène de degré 0, i.e.* $f(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d) = \lambda^0 f(a,b,c,d)$. *Ce qui permet de supposer que* $S = a + b + c + d = 1$. *(Cependant cela n'est pas indispensable). On a alors* $f(a,b,c,d) = (a+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d}\right) + (b+d)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a}\right) \underset{S=1}{=} \frac{a+c}{(a+b)(c+d)} + \frac{b+d}{(b+c)(a+d)}$. *Cette égalité devient avec* $x = a + c$, $y = a + b$ *et* $z = b + c$, $f(a,b,c,d) = \frac{x}{y(1-y)} + \frac{1-x}{z(1-z)}$, *puisque* $y(1-y) \leq \frac{1}{4}$ *et* $z(1-z) \leq \frac{1}{4}$, *on obtient* $f(a,b,c,d) \geq 4(x + (1-x)) = 4$.
Remarque : *Cette inégalité peut aussi s'écrire*

$$\forall (a,b,c,d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4, \quad \frac{c}{a+b} + \frac{d}{b+c} + \frac{a}{c+d} + \frac{b}{d+a} \geq \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{d}{c+d} + \frac{a}{d+a}$$

Exercice 8.41 *C'est la présence du* $\frac{1}{2}$ *qui va nous mettre sur la voie.*
Il s'agit de prouver que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq 2\left(\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n}\right)$. *Mais*

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n \\ \iff & (a_1 - b_1) + \cdots + (a_n - b_n) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a_1^2 - b_1^2}{a_1 + b_1} + \cdots + \frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n + b_n} = 0 \\ \iff & \frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} = \frac{b_1^2}{a_1 + b_1} + \cdots + \frac{b_n^2}{a_n + b_n} \end{aligned}$$

On doit ainsi prouver que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_1 + b_1} + \cdots + \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$$

or

$$\frac{a_i^2 + b_i^2}{a_i + b_i} = \frac{(a_i + b_i)^2 - 2a_ib_i}{a_i + b_i} = (a_i + b_i) - \frac{2a_ib_i}{a_i + b_i}$$

Le problème se résume ainsi à établir l'inégalité

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_ib_i}{a_i + b_i}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_ib_i}{a_i + b_i} \leq b_1 + \cdots + b_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) - \frac{4a_ib_i}{a_i + b_i} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i - b_i)^2}{a_i + b_i} \geq 0$$

De plus il y a égalité $\forall i,\ a_i = b_i$.
La condition sur la positivité des nombres n'est là que pour empêcher les divisions par zéro.

Exercice 8.42 *La première information est que les nombres sont réels. On a alors $1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 4\max\left(x^2, y^2, z^2, t^2\right)$ donc x, y, z et t sont en valeur absolue inférieur à $\frac{1}{2}$.*
On remarque ensuite que $xy + yz + zt + tx = (y + t)(z + x)$. Posons alors $u = x + z$ et $v = y + t$, on a $u + v = 0$ et $uv = (y + t)(z + x) = -u^2$. Puisque $|(y + t)(z + x)| \leq (|y| + |t|)(|z| + |x|) \leq 1$, on a $-1 \leq -u^2 \leq 0$.

Exercice 8.43 *Par symétrie des rôles, on peut supposer que $a \leq b \leq c$.*
Premier cas : Les trois nombres sont de même signe. Quitte à les remplacer par leurs opposés, on les suppose positifs. On a

$$\begin{array}{rcl} a & \geq & b + c \\ b & \geq & c + a \\ c & \geq & a + b \end{array}$$

En sommant les trois inégalités, on obtient

$$a + b + c \geq 2(a + b + c)$$

donc $a + b + c \leq 0$, mais $a + b + c \geq 0$ d'où l'égalité demandée.
Second cas : Un des nombres est de signe opposé aux deux autres. On peut supposer que $a \leq 0 \leq b \leq c$ (si $a \leq b \leq 0 \leq c$, on remplace les nombres par leurs opposés pour se ramener au cas précédent).
On a alors

$$\begin{array}{rcl} |a| & \geq & |b + c| \Longleftrightarrow -a \geq b + c \Longrightarrow -b \geq a + c \\ |b| & \geq & |a + c| \Longrightarrow -b \leq a + c \leq b \end{array}$$

donc $-b = a + c$ et $a + b + c = 0$.

Exercice 8.44 *Posons $a_i = x_i - a$, on doit montrer que $2\left(a_1^2 + ... + a_n^2\right) \leq \left(|a_1| + ... + |a_n|\right)^2$, ce qui est équivalent à $a_1^2 + ... + a_n^2 \leq 2\sum_{i \neq j} |a_ia_j|$. Il y a peu de chances que cela soit vrai en général. La condition $a = \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$ peut se traduire sous la forme $a_1 + ... + a_n = 0$. Dans ce cas, $(a_1 + ... + a_n)^2 = 0 = a_1^2 + ... + a_n^2 + 2\sum_{i \neq j} a_ia_j$. On est alors amené à prouver que $-2\sum_{i \neq j} a_ia_j \leq 2\sum_{i \neq j} |a_ia_j|$, ce qui est évident !*
Remarque : *plus généralement, on a montré que si les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ vérifient $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, alors $a_1^2 + ... + a_n^2 \leq \frac{1}{2}\left(|a_1| + ... + |a_n|\right)^2$.*

Exercice 8.45 *Remarquons que* $E(na) + E(nb) = E(na) + E(n - na) = n + E(na) + E(-na)$.
Or $E(na) \leq na < E(na) + 1 \Longrightarrow -E(na) - 1 < -na \leq -E(na)$.
Mais l'inégalité de droite est stricte car sinon $na = E(na) \Longrightarrow a = \frac{E(na)}{n} \in \mathbb{Q}$.
On en déduit que $E(-na) = -E(na) - 1$ *et* $E(na) + E(nb) = n - 1$.
Ainsi le sens $\Longrightarrow$ *est terminé.*
Réciproquement, on a $E(nc) + E(nd) \leq nc + nd = n(c + d) \leq E(nc) + E(nd) + 1$ *d'où*

$$\frac{E(nc) + E(nd)}{E(na) + E(nb)} = 1 \leq \frac{n(c+d)}{E(na) + E(nb)} = \frac{n(c+d)}{n-1} \leq \frac{E(nc) + E(nd)}{E(na) + E(nb)} + \frac{1}{E(na) + E(nb)} = 1 + \frac{1}{n-1}$$

On ne retient que

$$1 \leq \frac{n(c+d)}{n-1} \leq 1 + \frac{1}{n-1}$$

En passant à la limite sur n, *on en déduit que* $c + d = 1$.

Exercice 8.46 *Unicité : On utilise l'encadrement de la partie entière*

$$\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < E(x) \leq x$$

On en déduit

$$\begin{array}{rcl} -na & < & -E(na) \leq -na + 1 \\ na^2 - a & < & aE(na) \leq na^2 \\ aE(na) - 1 & < & E(aE(na)) \leq aE(na) \\ na^2 - a - 1 & < & E(aE(na)) \leq na^2 \\ na^2 - a - 1 - na & \leq & E(aE(na)) - E(na) \leq na^2 - na + 1 \end{array}$$

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl} na^2 - a - 1 - na & \leq & n - 1 \leq na^2 - na + 1 \\ n\left(a^2 - a - 1\right) - a & \leq & 0 \leq n\left(a^2 - a - 1\right) + 2 \end{array}$$

Les deux égalités sont vraies ***pour toutes valeurs de*** n, *ce qui impose*

$$a^2 - a - 1 = 0$$

(car si $a^2 - a + 1 > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(a^2 - a - 1\right) - a = +\infty$ *et si* $a^2 - a + 1 < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(a^2 - a - 1\right) + 2 = -\infty$ *)*
Les solutions de $a^2 - a - 1$ *sont* $a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$ *et* $a = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$. *L'une des deux valeurs est à exclure ! Mais si* $a = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$, *on a* $E(aE(a)) - E(a) = 1 \neq 1 - 1 = 0$ *!*
Ainsi

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ est le nombre d'or}$$

Existence : On suppose que $a = \phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, *alors* $a = \frac{1}{a} + 1$ *et*

$$E(aE(na)) = E\left(\frac{E(na)}{a} + E(na)\right) = E\left(\frac{E(na)}{a}\right) + E(na)$$

Puisque $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$, *que* $E(aE(na)) = E\left(\dfrac{E(na)}{a}\right) + E(na) = n - 1 + E(na)$ *(voir exercice indiqué dans l'énoncé).*
Exercice : Montrer de même que $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(na^2) = E(aE(na)) + 1 \Longleftrightarrow a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Exercice 8.47 *On va procéder par récurrence, il est facile de le vérifier pour $n = 2$ (et même pour les petits valeurs de n). En fait en regardant ce qui se passe pour les petites valeurs de n, on comprend comment évolue la somme. Posons $f(n) = E(\sqrt{n}) + E(\sqrt[2]{n}) + \cdots + E(\sqrt[n]{n})$ et $g(n) = E(\log_2 n) + E(\log_3 n) + \cdots + E(\log_n n)$. Lorsque l'on passe de n à $n+1$, $f(n+1)$ et $g(n+1)$ contiennent un terme de plus. Dans f, il s'agit de $E\left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)$ et dans g de $E\left(\log_{n+1}(n+1)\right)$. On peut facilement montrer que $\sqrt[n]{n} < 2$ (étudier la fonction $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ qui admet un maximun en $x = e$, donc $x^{\frac{1}{x}} \le e^{\frac{1}{e}} \simeq 1,44$), quant à $\ln_n(n)$, cela vaut 1 ! Les deux termes supplèmentaires on donc une partie entière égale à 1.*

Reste les n termes que l'on a modifiés. En réalité, ces termes sont toujours égaux, sauf lorsque $n+1$ est une puissance k-ième. Si $n+1$ n'est pas une puissance parfaite, i.e. ne s'écrit pas sous la forme a^b avec a et b entiers (nécessairement inférieur à n), alors pour tout k entre 2 et n, on a

$$\begin{aligned} E\left(\sqrt[k]{n}\right) &= E\left(\sqrt[k]{n+1}\right) \\ E\left(\log_k(n)\right) &= E\left(\log_k(n+1)\right) \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} E\left(\sqrt[k]{n}\right) &= p \Longleftrightarrow p \le \sqrt[k]{n} < p+1 \Longleftrightarrow n \in p^k \le n < (p+1)^k \\ E\left(\log_k(n)\right) &= p \Longleftrightarrow p \le \frac{\ln n}{\ln k} < p+1 \Longleftrightarrow k^p \le n < k^{(p+1)} \end{aligned}$$

Donc $E\left(\sqrt[k]{n}\right)$ compte le nombre de puissance $k-$ième strictement inférieure à n (0 exclus), par exemple $E\left(\sqrt[3]{56}\right) = 3$, et les puissances troisièmes sont $1, 8, 27, 64, \cdots$ il n'y en a que 3 inférieures à 56. Quand à $E\left(\log_k(n)\right)$, cela compte le nombre de puissances de k inférieures à n. Si $n+1$ est une puissance parfaite, $n+1 \ne a^b$ (avec a et b inférieur à n nécessairement) pour chaque diviseur d (différent de 1) de b, on a gagné une puissance $d-$ième, donc $E\left(\sqrt[d]{n+1}\right) = E\left(\sqrt[d]{n}\right) + 1$, ainsi

$$f(n+1) = f(n) + 1 + \sum_{\substack{d|b \\ d \ne 1}} 1$$

De la même manière, pour chaque diviseur $d \ne 1$ de b, on gagne une puissance nouvelle dans $g(n+1)$. Cette puissance est $\left(a^{\frac{b}{d}}\right)^d = a^b$, donc $E\left(\log_{a^{\frac{b}{d}}}(n+1)\right) = E\left(\log_{a^{\frac{b}{d}}}(n)\right) + 1$. On a donc gagné autant dans $g(n+1)$ que dans $f(n+1)$ et ainsi $f(n+1) = g(n+1)$ dans tous les cas.

Pour comprendre, prenons un exemple, si $n = 6^{10} - 1$, alors $n+1 = 6^{10}$. Les diviseurs de 10 sont $2, 5$ et 10. On a

$$\begin{aligned} E\left(\sqrt{6^{10}-1}\right) &= 7775 \text{ et } E\left(\sqrt{6^{10}}\right) = 7776 \\ E\left(\sqrt[5]{6^{10}-1}\right) &= 35 \text{ et } E\left(\sqrt[5]{6^{10}}\right) = 36 \\ E\left(\sqrt[10]{6^{10}-1}\right) &= 5 \text{ et } E\left(\sqrt[10]{6^{10}}\right) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(\log_{6^5}\left(6^{10}-1\right)\right) &= 1 \text{ et } E\left(\log_{6^5}\left(6^{10}\right)\right) = 2 \\ E\left(\log_{6^2}\left(6^{10}-1\right)\right) &= 4 \text{ et } E\left(\log_{6^2}\left(6^{10}\right)\right) = 5 \\ E\left(\log_{6^1}\left(6^{10}-1\right)\right) &= 9 \text{ et } E\left(\log_{6^1}\left(6^{10}\right)\right) = 10 \end{aligned}$$

(Exercice : calculer à la main, $E\left(\log_{6^5}\left(6^{10}\right)\right)$, $E\left(\log_{6^2}\left(6^{10}\right)\right)$ et $E\left(\log_{6^1}\left(6^{10}\right)\right)$).

Exercice 8.48

1. *Posons $f(n) = \prod_{i=0}^{k-1}\left(E\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{n-i}{k}\right)$, fonction définie sur $\mathbb{Z}$ (qui est définie à k fixé). Cette fonction est*

clairement k périodique, en effet

$$\begin{aligned} f(n+k) &= \prod_{i=0}^{k-1}\left(E\left(\frac{n+k}{k}\right)-\frac{n+k-i}{k}\right) \\ &= \prod_{i=0}^{k-1}\left(E\left(\frac{n}{k}+1\right)-\frac{n-i}{k}-1\right) \\ &= \prod_{i=0}^{k-1}\left(E\left(\frac{n}{k}\right)+1-\frac{n-i}{k}-1\right)=f(n) \end{aligned}$$

On veut prouver que f est nulle sur $\mathbb{Z}$, il suffit de l'évaluer pour $n=0,1,\cdots,k-1$. Mais si $0\leq n\leq k-1$, on a $0\leq \dfrac{n}{k}<1$ donc $E\left(\dfrac{n}{k}\right)=0$ donc $f(n)=\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}\left(-\frac{n-i}{k}\right)=0$ car un des facteurs est nul (n est compris entre 0 et $k-1$, donc i prend la valeur n).

Autre preuve : *Si $n\in\mathbb{Z}$, on effectue la division euclidienne de n par k, on a $n=kp+r$ où $0\leq r\leq k-1$. Alors $\dfrac{n}{k}=p+\dfrac{r}{k}$ donc $E\left(\dfrac{n}{k}\right)=p$ et $\dfrac{n-r}{k}=p$ donc pour $i=r$ le terme $E\left(\dfrac{n}{k}\right)-\dfrac{n-i}{k}$ est nul et par conséquent le produit aussi.*

2. *Si on développe $f(n)$, on obtient le résultat demandé. Par exemple avec $k=2$, on a*

$$\prod_{i=0}^{1}\left(E\left(\frac{n}{2}\right)-\frac{n-i}{2}\right)=E\left(\frac{n}{2}\right)^2-\frac{(2n-1)}{2}E\left(\frac{n}{2}\right)+\frac{n(n-1)}{4}$$

Soit

$$E\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{(2n-1)}{2}E\left(\frac{n}{2}\right)-\frac{n(n-1)}{4}$$

Pour $k=3$, on obtient

$$E\left(\frac{n}{3}\right)^3=(n-1)E\left(\frac{n}{3}\right)^2-\frac{(3n^2-6n+2)}{9}E\left(\frac{n}{3}\right)+\frac{n(n-1)(n-2)}{27}$$