Corrigé du Td sur la récurrence

1. Résultats élémentaires sur la suite de Fibonacci.

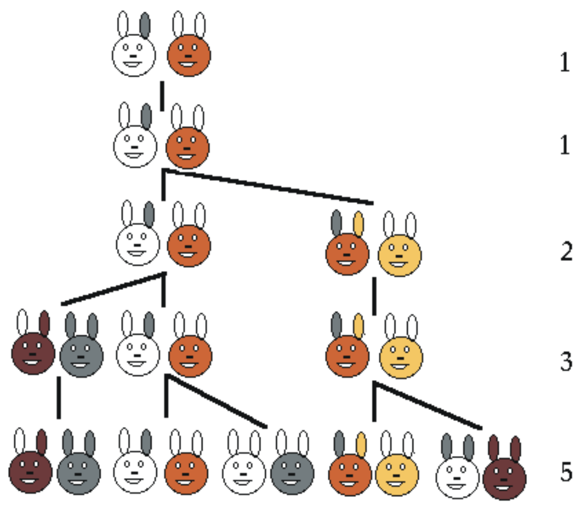
   La suite $(f_n)_n$ est appelée suite de Fibonacci, mais qui etait Fibonacci ?

   Fibonacci

   Fibonacci Leonardo né à Pise vers 1180 y meurt vers 1250. Son vrai nom est Leonardo da Pisa (fibonacci signifie le fils de Bonaccio), il est le fils d'un commerçant qui émigre en Algérie et qui encourage son fils à compter pour l'aider. Par la suite Leonardo voyage en Egypte, Sicile, Grèce et Syrie, ce qui lui permet d'entrer en contact avec les mathématiques grecques et arabes. De retour en Italie, il publie son *Liber abaci* où il expose le système de notation des nombres par les chiffres arabes, la notation de position, et l'algèbre[1] de base. L'oeuvre de Fibonacci est fondamentale comme lien entre les mathématiques arabes et celles de la Renaissance.
   La suite de Fibonacci a été introduite en 1202 pour résoudre le problème suivant: partant d'un couple de lapin, sachant que chaque couple produit chaque mois un nouveau couple, lequel ne devient productif qu'après deux mois, combien obtient-on de lapin au bout d'un temps donné ?
   La réponse est fournie par la suite de Fibonacci et le dessin ci dessous .

[1] Le mot "algèbre" est un mot d'origine arabe dérivé du titre d'un ouvrage de Al khawarizmi: "*Kitab al jabr*" (vers 800 à Bagdad) . Ce titre signifie "remettre en place", i.e. changer de coté de l'égalité les éléments de signe négatifs pour les rendre positifs. Le nom de ce mathématicien arabe a été latinisé en Algoritmi, ce qui a donné le mot algorithme.



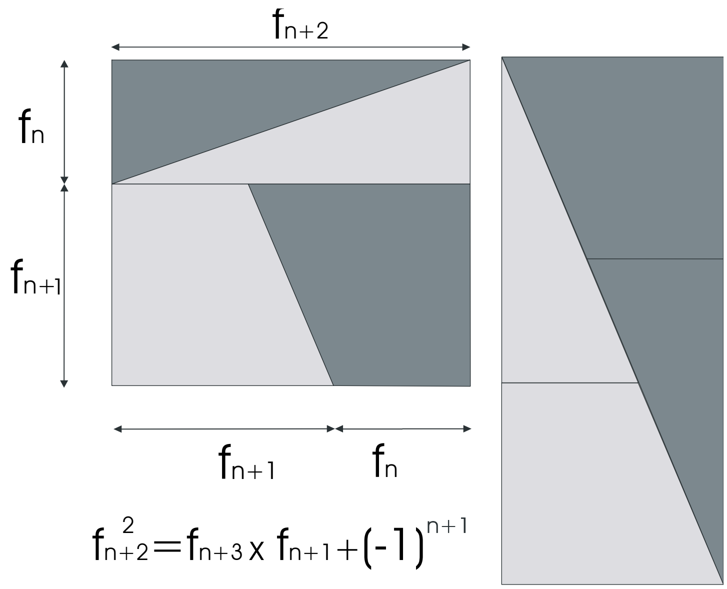
(a) Un calcul simple donne les premiers termes de la suite : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377...

(b) Pour montrer que f_n est toujours un entier le plus simple est de faire une récurrence à deux termes. On définit, pour tout entier n, $P(n) =$ "$f_n \in \mathbb{N}$". $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies (récurrence à deux termes), supposons à n fixé , $n \geq 0$ que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies, alors $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ est entier car par hypothèse de récurrence, f_n et f_{n+1} le sont.
La suite f_n est croissante car pour $n \geq 1$, $f_{n+1} - f_n = f_{n-1} \geq 0$ ($f_{n-1} \in \mathbb{N}$), de plus $f_1 \geq f_0$,donc **pour tout entier** n, $f_{n+1} \geq f_n$.
Il est clair que l'on a pas $f_n \geq n$ pour tout entier n ($f_2 = 1$par exemple), en revanche cela semble vrai pour $n \geq 5$. On le prouve par récurrence à deux termes sur n. Attention, la récurrence commence à $n = 5$. On définit, pour tout entier $n \geq 5$, $P(n) =$ "$f_n \geq n$". $P(5)$ et $P(6)$ sont vraies (récurrence à deux termes), supposons à n fixé , $n \geq 5$ que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies, alors $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \geq (n+1) + n \geq n+2$ car $n \geq 1$ et par hypothèse de récurrence $f_n \geq n$ et $f_{n+1} \geq n+1$.
Par minoration par une suite qui diverge vers $+\infty$, on a $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

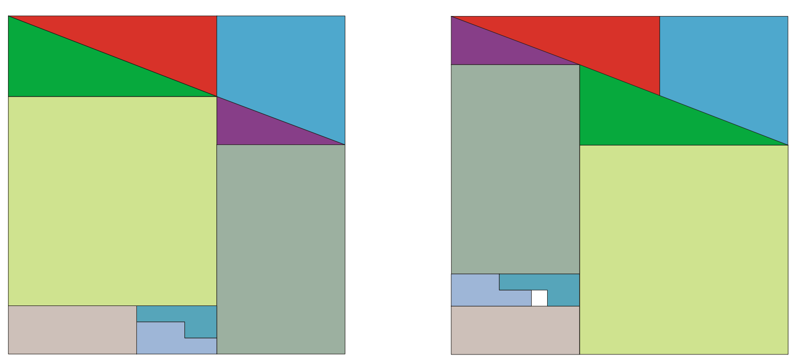
(c) Pour changer, une récurrence à un terme ! On définit pour $n \geq 0$, $P(n) =$ " $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$ ". $P(0)$ est vraie car $f_1^2 - f_0 f_2 = 1 = (-1)^0$. On suppose, à n fixé, $n \geq$ que $P(n)$ est vraie alors $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$
$= f_{n+1}^2 - (f_{n+2} - f_{n+1}) f_{n+2} = f_{n+1}(f_{n+1} + f_{n+2}) - f_{n+2}^2 = f_{n+1} f_{n+3} - f_{n+2}^2$
On en déduit que $f_{n+2}^2 - f_{n+1} f_{n+3} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$.
Il en résulte que f_n et f_{n+1} n'ont pas de diviseur commun autre que 1 dans $\mathbb{N}$ (leur pgcd vaut 1, on dit qu'ils sont premiers entre eux). En effet si d divise f_n et f_{n+1} alors d divise $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$. d ne peut valoir que 1.
L'identité de Cassini[2] est à la base de certains puzzles mathématiques (dont les

[2] Cassini Giovanni Domenico (1625-Paris 1712). Cassini est né dans le comté de Nice, alors italien. Appelé en France par Colbert en 1669, il s'y installe et se fait naturaliser. Astronome, il dirige l'observatoire de Paris dés 1672. Il est connu pour avoir découvert quatre de 18 satellites de Saturne et la division qui porte son nom dans les anneaux (division visible avec un petit télescope de type newton).

premiers du genre fûrent proposés par Lewis Carroll, l'auteur de "Alice au pays des Merveilles", où l'on rencontre un Lapin toujours en retard). Au départ on dispose d'un carré découpé, en déplaçant les morceaux on recompose un rectangle. La différence des surfaces est toujours d'une unité (de plus ou de moins).



La raison de ce paradoxe est simple, elle est liée au fait que les pentes des différents morceaux sont presque égales .
Pour le plaisir voici un puzzle plus élaboré :



(d) Comme indiqué, une récurrence à deux termes s'impose.
Soit $n \geq 1$ fixé, on définit, pour tout entier $p \geq 0$, $P(p) =$ "$f_{n+p} = f_{n-1}f_p + f_n f_{p+1}$". $P(0)$ est vraie: pour tout entier $n \geq 1$, $f_n = f_{n-1}f_0 + f_n f_1$ car $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$. $P(1)$ est vraie : pour tout entier $n \geq 1$, $f_{n+1} = f_{n-1}f_1 + f_n f_2$ ($f_2 = 1$). Supposons à p fixé , $p \geq 0$ que $P(p)$ et $P(p+1)$ soient vraies, alors $f_{n+p} = f_{n-1}f_p + f_n f_{p+1}$ et $f_{n+p+1} = f_{n-1}f_{p+1} + f_n f_{p+2}$.
On désire prouver que $f_{n+p+2} = f_{n-1}f_{p+2} + f_n f_{p+3}$, or par définition $f_{n+p+2} =$

$f_{n+p+1} + f_{n+p}$
$= f_{n-1}f_p + f_n f_{p+1} + f_{n-1}f_{p+1} + f_n f_{p+2} = f_{n-1}\underbrace{(f_p + f_{p+1})}_{=f_{p+2}} + f_n\underbrace{(f_{p+1} + f_{p+2})}_{=f_{p+3}}$, ce qui prouve l'hérédité.

Question optionnelle : par récurrence à un terme, sur k, à n fixé, $n \geq 1$. On définit pour $k \geq 1$, $P(k) =$ " f_n divise $f_{k\times n}$ ". $P(1)$ est vraie car f_n divise f_n. Supposons $P(k)$ vraie à k fixé, alors f_n divise f_{kn}. On a vu que $f_{n+p} = f_{n-1}f_p + f_n f_{p+1}$, avec $p = kn$, on a $f_{(k+1)n} = f_{n+kn} = f_{n-1}f_{kn} + f_n f_{kn+1}$ est divisible par f_n car chaque terme de la somme l'est.

On en déduit que si f_n est premier alors n l'est sauf si $n = 4$.

En effet, par l'absurde si $n = pq$,avec $p \geq 2$ et $q \geq 2$ alors f_p et f_q divisent f_n. Or pour $p \geq 3$, $f_p \geq 2$, idem avec f_q. Donc si $p \geq 3$ et $q \geq 3$, alors f_{pq} n'est pas premier.(il admet deux diviseurs > 1) Il reste les cas $p = 2, q = 3$ et $p = 2, q = 2$. $f_6 = 8$ n'est pas premier mais $f_4 = 3$ l'est sans que 4 le soit.

Pour la réciproque, il faut calculer tous les f_n pour n premier jusque $n = 19$ pour lequel $f_{19} = 4181 = 113 \times 37$, ce qui prouve que la réciproque est fausse.

2. La suite $(u_n)_n$

   (a) On a vu que $(f_n)_n$ est croissante, or $f_1 = 1$,donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \geq f_1 = 1$, u_n est donc parfaitement défini (pas de division par zéro).

   (b) Puisque f_n et f_{n+1} n'ont pas que 1 comme diviseur dans $\mathbb{N}$, la fraction u_n est irréductible. Les premières valeurs sont : $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}...$

   (c) Par définition de f_n et de u_n, $u_{n+1} = \dfrac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \dfrac{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

   (d) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{f_{n+2}}{f_{n+1}} - \dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \dfrac{f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2}{f_{n+1}f_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{f_n f_{n+1}}$, le signe est donc alterné. La suite $(u_n)_n$ n'est pas monotone !

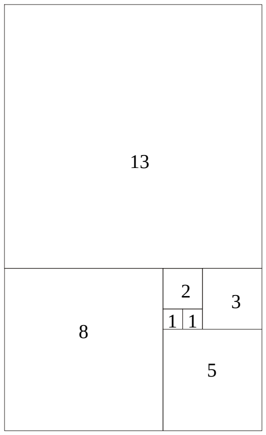
3. On applique le cours, la suite de Fibonacci est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 - x - 1$ dont les racines sont $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On sait qu'il existe alors λ et μ tels que $u_n = \lambda a^n + \mu b^n$, il suffit donc de vérifier que la formule donnée dans l'énoncé est valable aux rang $n = 0$ et $n = 1$, ce qui est très simple.

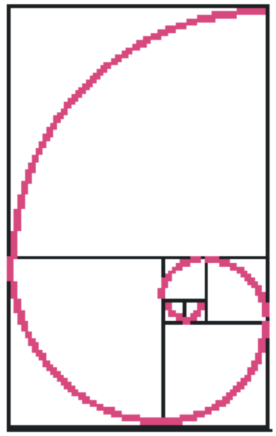
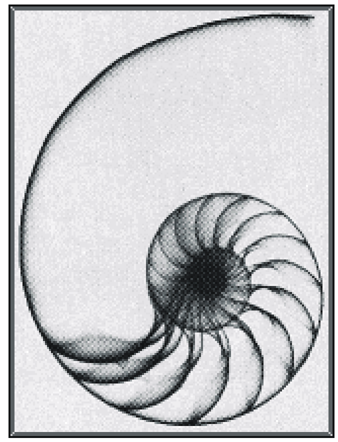
4. On a donc $u_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n} = a\dfrac{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^n}$, puisque $0 \leq \frac{b}{a} \leq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a = \varpi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a alors $\varpi^2 = \varpi + 1$ (i.e $\varpi = \dfrac{1}{\varpi} + 1$, résultat que l'on retrouve en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$)

5. Montrer que $f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1}$

   Cette égalité peut se prouver par récurrence, mais on la comprend bien visuellement :

Dans le dessin de gauche, on a représenté les carrés de coté f_n. On les juxtapose de manière à obtenir un rectangle, en comparant les aires, on obtient la relation demandée. A titre culturel, si on trace des arcs de cercles dans chaque carré comme indiqué dans la deuxième figure, on obtient une spirale qui rappelle certaines coupes de coquillages.



6. On définit, pour $n \geq 0$, la propriété $\mathcal{P}(n) =$ " $\forall m \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_{m+k} = f_{m+2n}$".

   Initialisation : vérifions $\mathcal{P}(0)$, soit $m \in \mathbb{N}$, on a bien $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f_{m+k} = C_m^0$.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_{m+k} = f_{m+2n}$, on écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f_{m+k} &= f_m + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f_{m+k} + f_{m+n+1} \\
&= f_m + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f_{m+k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f_{m+k} + f_{m+n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f_{m+j+1} - f_{m+n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_{m+k} + f_{m+n+1} \\
&= f_{m+2n+1} - f_{m+n+1} + f_{m+2n} + f_{m+n+1} \\
&= f_{m+2n+2} = f_{m+2(n+1)}
\end{aligned}$$

   L'avant dernière égalité provient de l'hypothèse de récurrence appliquée avec m et $m+1$. La dernière ligne provient de la relation de récurrence dela suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En conclusion, on a bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Quelque adresses internet où l'on peut en savoir plus :
http://www.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html