Utilisation du principe de récurrence : La suite de Fibonacci

1. On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0 = 0,\ f_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

   (a) Déterminer f_n pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathbb{N}$, que $(f_n)_n$ est une suite croissante. A t-on $f_n \geq n$ pour tout entier n, si non, à partir de quel rang n_0 est-ce vrai ?. En déduire la limite de $(f_n)_n$ quand n tend vers l'infini.

   (c) Montrer l'identité de Cassini : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$ (utiliser le fait que si $n \geq 0,\ f_n = f_{n+2} - f_{n+1}$)
   En déduire que f_n et f_{n+1} n'ont pas de diviseur commun (sauf 1 !)

   (d) Montrer que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, $f_{n+p} = f_{n-1}f_p + f_n f_{p+1}$ (On fera une récurrence sur $p \geq 0$, à n fixé, en utilisant, après l'avoir justifiée, la relation $f_{n+p+2} = f_{n+p+1} + f_{n+p}$)
   Question optionnelle : Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, f_n divise $f_{k\times n}$.
   En déduire que si f_n est un nombre premier alors n est premier à une exception près. Pensez vous que la réciproque soit vraie ?

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$.

   (a) Montrer que cette suite est parfaitement définie et que $\forall \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$

   (b) Donner les six premières valeurs de u_n sous forme de fraction. Justifier que u_n est, pour tout entier n, une fraction irréductible.

   (c) Montrer que $\forall \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + 1$ (ce qui montre que $u_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\cdots\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}$
   où l'expression contient n fractions)

   (d) Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.

3. Montrer la formule de Binet : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n = \dfrac{1}{2^n\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right)$

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. On notera ϖ cette limite, montrer que $\varpi^2 = \varpi + 1$ et que $\varpi = \dfrac{1}{\varpi} + 1$. Le nombre ϖ (souvent noté ϕ est appelé le nombre d'or)

5. Montrer que $f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1}$

6. Montrer que $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k f_{m+k} = f_{m+2n}$