

Quatre fois 4

Olivier Rioul

Oct. 2007

Pour Géry Huvent

Voici les résultats de la recherche systématique des écritures avec quatre 4 des entiers de 0 à 128. Dans ces résultats, on présente les écritures les plus simples possibles selon la méthode expliquée ci-dessous, les variantes triviales étant éliminées. En **gras**, les simplifications ou alternatives (par rapport à la page 4 de G. Huvent).

Si possible, dans l'ordre :

- 1** On n'autorise que des *nombres* 4, l'addition, la soustraction et la multiplication. Seuls 0, 4, 8, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 60, 64, 68, 80 et 128 s'écrivent de cette manière.
- 2** On n'autorise que le chiffre 4, et les quatre opérations usuelles (avec la division). En plus des précédents, on obtient seulement 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 17, 20, 43, 44, 45, 52, 88 et 111. En autorisant les puissances, on obtient en plus les entiers 63, 65 et 81 et aucun autre.
- 3** On n'autorise que des chiffres 4, les quatre opérations usuelles, les puissances, et $4! = 24$ ou $\sqrt{4} = 2$ (pas les deux si possible). Si les variantes sont trop nombreuses, on évite les puissances et les fractions.

A cette étape on a obtenu tous les entiers ≤ 128 à l'exception de 33, 39, 41, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 113, 115, 117, 119, 123 et 125. (Seuls les entiers 37, 74, 78, 82, 94, 98, 106, 110, 114, 118, et 122 nécessitent à la fois $4! = 24$ et $\sqrt{4} = 2$.)

Si l'on autorise aussi les racines (et factorielles) imbriquées, on obtient en

plus les écritures compliquées :

$$33 = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{4!}} + \sqrt{4}}}}{\sqrt{4}}$$

$$51 = 4! \times \left(\sqrt{4} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{-4!}}}}} \right)$$

$$93 = 4! \times \left(4 - \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{-4!}}}}} \right)$$

$$99 = 4! \times \left(4 + \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{-4!}}}}} \right)$$

$$125 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\left(4 + \frac{4}{4}\right)^{4!}}}}$$

et aucune autre (preuve « par programme »...). La chasse serait donc fermée...

Ceci dit, l'utilisation de la factorielle $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ relève d'une convention arbitraire, rien n'empêche d'inclure aussi la *termielle* $n? = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Ceci permet de couvrir **tous** les entiers jusqu'à 128.

Pour les nombres qui restaient (33, 39, 41, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 113, 115, 117, 119, 123 et 125), si possible, dans l'ordre :

4 On n'autorise que des chiffres 4, les quatre opérations usuelles, les puissances, le nombre $4? = 10$, et $4! = 24$ ou $\sqrt{4} = 2$ (pas les deux si possible).

On obtient en plus les entiers 33, 39, 41, 51, 53, 55, 59, 61, 75, 85, 91, 99, 101, 105, 115, 119, 123, 125 et aucun autre.

5 On autorise non seulement $4?$, mais aussi $4?? = 55$, avec $4!$ ou si ce n'est pas possible, avec $\sqrt{4}$. A cette étape tous les entiers ≤ 128 sont trouvés. (Seul 83 nécessite à la fois $4??$, $4?$ et $\sqrt{4}$ et seul 117 nécessite à la fois $4??$, $4!$ et $\sqrt{4}$.)

$$0 = 4 + 4 - 4 - 4 = 4 - (4 - (4 - 4)) = 4 \times 4 - 4 \times 4$$

$$= (4 \pm 4) \times (4 - 4) = (4 - 4) \times 4 \times 4$$

$$1 = \frac{4}{4} + 4 - 4 = \frac{4 + 4 - 4}{4} = \frac{4}{4} = \frac{\frac{4}{4}}{\frac{4}{4}} = \frac{44}{44} = \frac{4 \times 4}{4 \times 4} = \frac{4 + 4}{4 + 4}$$

$$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \frac{4 \times 4}{4 + 4} = 4 - \frac{4 + 4}{4} = \frac{4}{4 + 4} \times 4$$

$$3 = \frac{4 + 4 + 4}{4} = \frac{4 \times 4 - 4}{4}$$

$$4 = 4 \pm (4 - 4) \times 4$$

$$5 = \frac{4 \times 4 + 4}{4}$$

$$6 = \frac{4 + 4}{4} + 4$$

$$7 = 4 + 4 - \frac{4}{4} = \frac{44}{4} - 4$$

$$8 = 4 + 4 + 4 - 4 = 4 \times 4 - (4 + 4)$$

$$9 = 4 + 4 + \frac{4}{4}$$

$$10 = \frac{44 - 4}{4}$$

$$11 = \frac{4! + 4}{4} + 4 = \frac{4! + 4! - 4}{4}$$

$$= \frac{44}{\sqrt{4} \times \sqrt{4}} = \frac{44}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} = \frac{44}{(\sqrt{4})^{\sqrt{4}}}$$

$$12 = \frac{44 + 4}{4} = 4 \times (4 - \frac{4}{4})$$

$$13 = 4! - \frac{44}{4} = \frac{4! + 4! + 4}{4}$$

$$= \frac{44}{4} + \sqrt{4}$$

$$14 = \frac{4!}{4} + 4 + 4 = 4! - 4 - \frac{4!}{4}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{4 + 4 + 4 + \sqrt{4}} = 4 \times \sqrt{4} + 4 + \sqrt{4} = 4 \times 4 - 4 + \sqrt{4} \\
&= (4 \times \sqrt{4}) \times \sqrt{4} - \sqrt{4} = (4 + \sqrt{4}) \times \sqrt{4} + \sqrt{4} \\
&= (4 + 4) \times \sqrt{4} - \sqrt{4} = (\sqrt{4} + \sqrt{4}) \times 4 - \sqrt{4} \\
&= 4 \times \sqrt{4} \times \sqrt{4} - \sqrt{4} \\
15 &= \frac{\mathbf{44}}{\mathbf{4}} + \mathbf{4} = 4 \times 4 - \frac{4}{4} \\
16 &= 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 4 + 4 - 4 = (\mathbf{4 + 4 - 4}) \times \mathbf{4} \\
17 &= 4 \times 4 + \frac{4}{4} \\
18 &= \frac{4! + 4! + 4!}{4} = \frac{4! \times 4 - 4!}{4} \\
&= 4 \times 4 + 4 - \sqrt{4} = (4 + 4) \times \sqrt{4} + \sqrt{4} \\
&= (4 \times \sqrt{4}) \times \sqrt{4} + \sqrt{4} = (\sqrt{4} + \sqrt{4}) \times 4 + \sqrt{4} \\
19 &= 4! - 4 - \frac{4}{4} = 4! - \frac{4! - 4}{4} \\
20 &= \mathbf{4 \times (4 + \frac{4}{4})} \\
21 &= 4! - 4 + \frac{4}{4} = 4! - \frac{4!}{4 + 4} \\
&= \frac{44 - \sqrt{4}}{\sqrt{4}} \\
22 &= \mathbf{4! + 4} - \frac{4!}{4} = \mathbf{4 \times 4} + \frac{4!}{4} = 4! - \frac{4 + 4}{4} \\
&= \mathbf{4 \times 4 + 4} + \sqrt{4} = (4 + \sqrt{4}) \times 4 - \sqrt{4} \\
23 &= \mathbf{4! - 4^{4-4}} = \frac{4! \times 4 - 4}{4} = \frac{4! \times 4! - 4!}{4!} = 4! - \left(\frac{4}{4}\right)^4 \\
&= \frac{\mathbf{44 + \sqrt{4}}}{\sqrt{4}} \\
24 &= \mathbf{4 \times 4 + 4 + 4} \\
25 &= \mathbf{4! + 4^{4-4}} = \frac{4! \times 4 + 4}{4} = \frac{4! \times 4! + 4!}{4!} = 4! + \left(\frac{4}{4}\right)^4 \\
&= \left(\frac{4}{4} + 4\right)^{\sqrt{4}}
\end{aligned}$$

$$26 = \frac{4!}{4} + 4! - 4 = 4! + \frac{4+4}{4}$$

$$= (4 + \sqrt{4}) \times 4 + \sqrt{4} = \frac{44}{\sqrt{4}} + 4$$

$$27 = 4! + 4 - \frac{4}{4} = \frac{4!}{4+4} + 4!$$

$$28 = (4+4) \times 4 - 4$$

$$29 = 4! + 4 + \frac{4}{4} = \frac{4! - 4}{4} + 4!$$

$$30 = \frac{4 \times 4! + 4!}{4}$$

$$= 4 \times (4+4) - \sqrt{4} = 4 \times 4 \times \sqrt{4} - \sqrt{4}$$

$$= 4^{\sqrt{4}} \times \sqrt{4} - \sqrt{4} = \sqrt{4}^4 \times \sqrt{4} - \sqrt{4}$$

$$31 = 4! + \frac{4!+4}{4}$$

$$32 = 4 \times 4 + 4 \times 4$$

$$33 = 4! + 4? - \frac{4}{4}$$

$$34 = 4! + 4 + \frac{4!}{4}$$

$$= 4 \times (4+4) + \sqrt{4} = 4 \times 4 \times \sqrt{4} + \sqrt{4} = (4 + \sqrt{4})^{\sqrt{4}} - \sqrt{4}$$

$$= 4^{\sqrt{4}} \times \sqrt{4} + \sqrt{4} = \sqrt{4}^4 \times \sqrt{4} + \sqrt{4}$$

$$35 = \frac{44}{4} + 4!$$

$$36 = (4+4) \times 4 + 4$$

$$37 = \frac{4! + \sqrt{4}}{\sqrt{4}} + 4!$$

$$38 = 44 - \frac{4!}{4}$$

$$= 44 - 4 - \sqrt{4} = (4 + \sqrt{4})^{\sqrt{4}} + \sqrt{4}$$

$$39 = 4 \times 4? - \frac{4}{4}$$

$$40 = 4! + 4! - 4 - 4 = 4 \times 4 \times 4 - 4! = \frac{4^4}{4} - 4! = \left(\frac{4!}{4} + 4\right) \times 4$$

$$= (4 \times 4 + 4) \times \sqrt{4} = (4 + 4 + \sqrt{4}) \times 4 = 44 - \sqrt{4} - \sqrt{4} = 44 - \sqrt{4} \times \sqrt{4}$$

$$41 = 4 \times 4? + \frac{4}{4}$$

$$42 = 4! + 4! - \frac{4!}{4}$$

$$= 44 - 4 + \sqrt{4} = 44 - \frac{4}{\sqrt{4}}$$

$$43 = 44 - \frac{4}{4}$$

$$44 = 44 + 4 - 4 = 44 \times \frac{4}{4} = \frac{44 \times 4}{4}$$

$$45 = 44 + \frac{4}{4}$$

$$46 = 44 + 4 - \sqrt{4} = 44 + \frac{4}{\sqrt{4}}$$

$$47 = 4! + 4! - \frac{4}{4}$$

$$48 = (4 + 4 + 4) \times 4 = (4 \times 4 - 4) \times 4$$

$$49 = 4! + 4! + \frac{4}{4}$$

$$50 = 44 + \frac{4!}{4}$$

$$= 44 + 4 + \sqrt{4}$$

$$51 = \frac{4? \times 4? + \sqrt{4}}{\sqrt{4}}$$

$$52 = 44 + 4 + 4$$

$$53 = \frac{4 \times 4! + 4?}{\sqrt{4}} = 4! + 4! + \frac{4?}{\sqrt{4}} = \left(\frac{4?}{4} + 4!\right) \times \sqrt{4}$$

$$54 = 4! + 4! + \frac{4!}{4} = \frac{\left(\frac{4!}{4}\right)^4}{4!}$$

$$55 = \frac{(4! - \sqrt{4}) \times 4?}{4} = \frac{4? \times 4? + 4?}{\sqrt{4}}$$

$$56 = 4! + 4! + 4 + 4 = (4 + 4) \times 4 + 4! = (4! - 4) \times 4 - 4!$$

$$= (4 \times 4 - \sqrt{4}) \times 4 = (\sqrt{4}^4 - \sqrt{4}) \times 4 = (4^{\sqrt{4}} - \sqrt{4}) \times 4$$

$$\begin{aligned}
57 &= \mathbf{4?? + 4? - 4 - 4} = 4?? + \frac{4+4}{4} \\
&= (4! + 4) \times 4 - 4?? \\
58 &= \frac{4^4 - 4!}{4} \\
59 &= \frac{\mathbf{4! \times 4? - 4}}{4} \\
60 &= \mathbf{4 \times 4 \times 4 - 4} \\
61 &= \frac{\mathbf{4! \times 4? + 4}}{4} \\
62 &= \mathbf{4 \times 4 \times 4 - \sqrt{4}} = \frac{4^4}{4} - \sqrt{4} \\
&= (4+4)^{\sqrt{4}} - \sqrt{4} = \sqrt{4}^{4+\sqrt{4}} - \sqrt{4} = \sqrt{4}^4 \times 4 - \sqrt{4} = (4 \times \sqrt{4})^{\sqrt{4}} - \sqrt{4} \\
63 &= \frac{4^4 - 4}{4} \\
64 &= \mathbf{(4+4) \times (4+4)} \\
65 &= \frac{4^4 + 4}{4} \\
66 &= \mathbf{4 \times 4 \times 4 + \sqrt{4}} = \frac{4^4}{4} + \sqrt{4} \\
&= (4+4)^{\sqrt{4}} + \sqrt{4} = \sqrt{4}^{\sqrt{4}+4} + \sqrt{4} = \sqrt{4}^4 \times 4 + \sqrt{4} = (4 \times \sqrt{4})^{\sqrt{4}} + \sqrt{4} \\
67 &= \mathbf{4?? + 4 + 4 + 4} \\
68 &= \mathbf{4 \times 4 \times 4 + 4} \\
69 &= \mathbf{4? \times 4? + 4! - 4??} \\
&= (4?? - 4!) \times 4 - 4?? \\
70 &= \frac{\mathbf{4^4 + 4!}}{4} \\
71 &= \mathbf{4?? + 4? + 4? - 4} = \left(\frac{4??}{4} + 4\right) \times 4 \\
&= 4?? + 4! - 4 - 4 = 4?? + 4? + \frac{4!}{4} = 4 \times 4? + 4?? - 4! \\
72 &= 44 + 4! + 4 = \frac{\mathbf{4! \times 4!}}{\mathbf{4+4}} = \left(4 - \frac{4}{4}\right) \times 4! = \left(4! - \frac{4!}{4}\right) \times 4 \\
&= (\mathbf{4 \times 4 + \sqrt{4}}) \times \mathbf{4} = (\sqrt{4}^4 + \sqrt{4}) \times 4 = (4 + \sqrt{4})^{\sqrt{4}} \times \sqrt{4} \\
73 &= \mathbf{4?? + 4? + 4 + 4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4?? + 4! - 4? + 4 = 4?? + 4! - \frac{4!}{4} \\
74 &= 4! + 4! + 4! + \sqrt{4} = 4 \times 4! - 4! + \sqrt{4} = 4! + \sqrt{4} \times 4! + \sqrt{4} \\
75 &= (4? - \frac{4?}{4}) \times 4? \\
76 &= 4! + 4! + 4! + 4 = 4 \times 4! - 4! + 4 = (4! - 4) \times 4 - 4 \\
77 &= \frac{4??}{4?} \times (4? + 4) = \frac{4?? \times 4}{4?} + 4?? \\
&= \frac{4??}{4?} \times (4! - 4?) = \frac{4?? \times 4!}{4?} - 4?? \\
78 &= (4! - 4) \times 4 - \sqrt{4} \\
79 &= (4? - 4) \times 4 + 4?? \\
&= 4?? + 4! + 4 - 4 \\
80 &= (4 \times 4 + 4) \times 4 \\
81 &= (4 - \frac{4}{4})^4 \\
82 &= (4! - 4) \times 4 + \sqrt{4} \\
83 &= 4?? + (4? + 4) \times \sqrt{4} \\
84 &= (4! - 4) \times 4 + 4 \\
&= 44 \times \sqrt{4} - 4 = (44 - \sqrt{4}) \times \sqrt{4} \\
85 &= \frac{4! + 4?}{4} \times 4? \\
86 &= 44 \times \sqrt{4} - \sqrt{4} \\
87 &= 4?? + (4 + 4) \times 4 \\
&= 4?? + 4! + 4 + 4 \\
88 &= 44 + 44 \\
89 &= 4?? + 44 - 4? \\
&= (4? - 4) \times 4! - 4?? = \frac{4! \times 4!}{4} - 4?? \\
90 &= 4! \times 4 - \frac{4!}{4} \\
&= 44 \times \sqrt{4} + \sqrt{4} \\
91 &= 4 \times 4! - \frac{4?}{\sqrt{4}}
\end{aligned}$$

$$92 = 44 + 4! + 4! = (4! - \frac{4}{4}) \times 4 = (4 - \frac{4}{4!}) \times 4!$$

$$= 44 \times \sqrt{4} + 4 = (44 + \sqrt{4}) \times \sqrt{4}$$

$$93 = 4?? + 4! + 4? + 4 = 4?? + 4! + 4! - 4?$$

$$94 = 4 \times 4! - 4 + \sqrt{4} = 4 \times 4! - \frac{4}{\sqrt{4}} = (4! - \frac{\sqrt{4}}{4}) \times 4 = (4 - \frac{\sqrt{4}}{4!}) \times 4!$$

$$= (4! + 4!) \times \sqrt{4} - \sqrt{4} = (\sqrt{4} + \sqrt{4}) \times 4! - \sqrt{4} = \sqrt{4} \times \sqrt{4} \times 4! - \sqrt{4}$$

$$95 = 4 \times 4! - \frac{4}{4}$$

$$96 = 4! + 4! + 4! + 4! = 4! \times 4 + 4 - 4 = (4 - 4 + 4) \times 4! = (4! - 4 + 4) \times 4$$

$$= \frac{4 \times 4 \times 4!}{4} = \frac{4 \times 4! \times 4!}{4!} = 4^{\frac{4}{4}} \times 4! = (4 \times 4!) \times \frac{4}{4} = (4 \times 4!)^{\frac{4}{4}}$$

$$= (44 + 4) \times \sqrt{4} = (4 \times 4) \times (4 + \sqrt{4})$$

$$97 = 4 \times 4! + \frac{4}{4}$$

$$98 = 4 \times 4! + 4 - \sqrt{4} = 4 \times 4! + \frac{4}{\sqrt{4}} = (4! + \frac{\sqrt{4}}{4}) \times 4 = (4 + \frac{\sqrt{4}}{4!}) \times 4!$$

$$= (4! + 4!) \times \sqrt{4} + \sqrt{4} = (\sqrt{4} + \sqrt{4}) \times 4! + \sqrt{4} = \sqrt{4} \times \sqrt{4} \times 4! + \sqrt{4}$$

$$99 = 4? \times 4? - \frac{4}{4}$$

$$100 = (4! + \frac{4}{4}) \times 4 = (4 + \frac{4}{4!}) \times 4!$$

$$= (4 + 4 + \sqrt{4})^{\sqrt{4}} = (4 \times \sqrt{4} + \sqrt{4})^{\sqrt{4}}$$

$$101 = 4? \times 4? + \frac{4}{4}$$

$$102 = 4! \times 4 + \frac{4!}{4}$$

$$103 = 4?? + 44 + 4$$

$$104 = 4 \times 4! + 4 + 4 = (4! - 4) \times 4 + 4!$$

$$105 = 4? \times 4? + \frac{4?}{\sqrt{4}}$$

$$106 = (4! + \sqrt{4}) \times 4 + \sqrt{4}$$

$$107 = 4?? + 4! + 4! + 4$$

$$108 = (4 + 4!) \times 4 - 4$$

$$109 = \mathbf{4?? + 44 + 4?} = 4?? + 4?? - \frac{4}{4}$$

$$110 = (4! + 4) \times 4 - \sqrt{4}$$

$$111 = \frac{444}{4}$$

$$112 = 4 \times 4! + 4 \times 4$$

$$113 = \mathbf{4?? + 4? + 4! + 4!}$$

$$114 = (4! + 4) \times 4 + \sqrt{4}$$

$$115 = \frac{\mathbf{4! \times 4? - 4?}}{\sqrt{4}}$$

$$116 = 4 \times 4! + 4! - 4 = (4 + 4!) \times 4 + 4$$

$$117 = \mathbf{4?? + (4?? - 4!) \times \sqrt{4}}$$

$$118 = 4 \times 4! + 4! - \sqrt{4}$$

$$119 = \frac{\mathbf{4! \times 4? - \sqrt{4}}}{\sqrt{4}}$$

$$120 = (4! - 4) \times \frac{4!}{4} = \frac{4! \times 4!}{4} - 4! = \left(\frac{4}{4} + 4\right) \times 4! = \left(\frac{4!}{4} + 4!\right) \times 4$$

$$121 = \left(\frac{44}{4}\right)^{\sqrt{4}}$$

$$122 = 4 \times 4! + 4! + \sqrt{4}$$

$$123 = \frac{\mathbf{4^4 - 4?}}{\sqrt{4}}$$

$$124 = 4! \times 4 + 4! + 4$$

$$= \frac{4^4}{\sqrt{4}} - 4$$

$$125 = \left(\mathbf{4? + \frac{4?}{4}}\right) \times 4?$$

$$126 = \frac{4^4}{\sqrt{4}} - \sqrt{4}$$

$$= \frac{4^4 - 4}{\sqrt{4}}$$

$$127 = \frac{4^4 - \sqrt{4}}{\sqrt{4}}$$

$$128 = (4 + 4) \times 4 \times 4$$