On considère l'application f définit sur C par $f(z) = \frac{a\cdot z+2}{1+z+z^2}$: où a est un paramètre réel

Quel est le domaine de définition de f ?
Montrer que l'image du cercle trigonométrique (intersecté avec Df) est, en général, une hyperbole.
Traiter les cas a=1 et a=0.

On commence par définir l'application f.

$f := z \rightarrow \frac{(a\cdot z+2)}{(1+z+z^2)};$

$$z \rightarrow \frac{a\,z+2}{1+z+z^2} \tag{1}$$

Pour le domaine de définition, on le sait bien, il faut que z soit différent de j et de son conjugué, affaire réglée....
On examine l'image d'un complexe de module 1.

$Z := f(\cos(t)+I\cdot\sin(t));$

$$\frac{a\,(\cos(t)+\mathrm{I}\sin(t))+2}{1+\cos(t)+\mathrm{I}\sin(t)+(\cos(t)+\mathrm{I}\sin(t))^2} \tag{2}$$

$Z := evalc(\%);$

$$\begin{aligned}&\frac{(a\cos(t)+2)\left(1+\cos(t)+\cos(t)^2-\sin(t)^2\right)}{\left(1+\cos(t)+\cos(t)^2-\sin(t)^2\right)^2+(\sin(t)+2\cos(t)\sin(t))^2}\\&+\frac{a\sin(t)\,(\sin(t)+2\cos(t)\sin(t))}{\left(1+\cos(t)+\cos(t)^2-\sin(t)^2\right)^2+(\sin(t)+2\cos(t)\sin(t))^2}\\&+\mathrm{I}\left(\frac{a\sin(t)\left(1+\cos(t)+\cos(t)^2-\sin(t)^2\right)}{\left(1+\cos(t)+\cos(t)^2-\sin(t)^2\right)^2+(\sin(t)+2\cos(t)\sin(t))^2}\right.\\&\left.-\frac{(a\cos(t)+2)\,(\sin(t)+2\cos(t)\sin(t))}{\left(1+\cos(t)+\cos(t)^2-\sin(t)^2\right)^2+(\sin(t)+2\cos(t)\sin(t))^2}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

$Z := simplify(\%);$

$$\frac{2\cos(t)-2\,\mathrm{I}\sin(t)+a}{1+2\cos(t)} \tag{4}$$

Pour obtenir l'équation du lieu, on écrit que les coordonnées de Z sont x et y, on exprime alors cos (t) et sin(t) en fonction de x et de y.

$eq1 := \{x = evalc(\mathrm{Re}(Z)), y = evalc(\mathrm{Im}(Z))\};$

$$\left\{y = -\frac{2\sin(t)}{1+2\cos(t)}, x = \frac{2\cos(t)+a}{1+2\cos(t)}\right\} \tag{5}$$

$eq2 := solve(eq1, \{\cos(t), \sin(t)\});$

$$\left\{\cos(t) = \frac{1}{2}\,\frac{-x+a}{-1+x}, \sin(t) = -\frac{1}{2}\,\frac{y\,(-1+a)}{-1+x}\right\} \tag{6}$$

On peut vérifier qu'il y a bien équivalence, on résout ce système pour obtenir x et y.

$solve(eq2, \{x, y\});$

$$\left\{y = -\frac{2\sin(t)}{1+2\cos(t)}, x = \frac{2\cos(t)+a}{1+2\cos(t)}\right\} \tag{7}$$

$eq2;$

$$\left\{\cos(t) = \frac{1}{2}\,\frac{-x+a}{-1+x},\ \sin(t) = -\frac{1}{2}\,\frac{y\,(-1+a)}{-1+x}\right\} \tag{8}$$

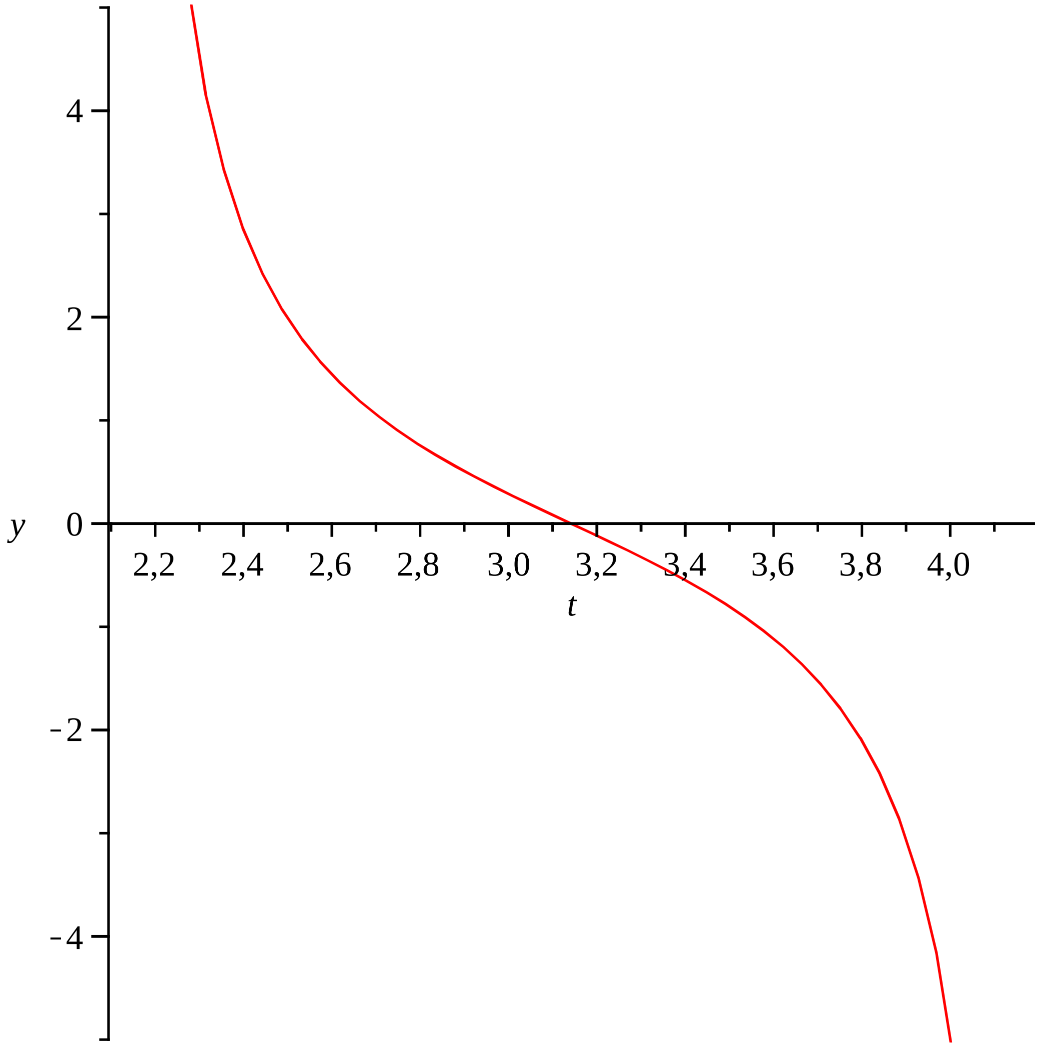
On constate que x ne peut pas prendre la valeur 1 (en fait x=1 que si a=1) et que a=1 semble être un cas particulier. Examinons ce cas.

subs$(a=1, eq1)$;

$$\left\{y = -\frac{2\sin(t)}{1+2\cos(t)},\ x=1\right\} \tag{9}$$

On semble récupérer la droite x=1 (attention t ne peut pas prendre les valeurs 2π/3 et 4π/3. On peut vérifier graphiquement que entre 2Pi/3 et 4Pi/3, y prend toutes les valeurs réelle.

plot$\left(-\frac{2\sin(t)}{1+2\cos(t)},\ t=\frac{2\cdot\pi}{3}\,..\,\frac{4\cdot\pi}{3},\ y=-5\,..5\right)$;



diff$\left(-\frac{2\sin(t)}{1+2\cos(t)},\ t\right)$;

$$-\frac{2\cos(t)}{1+2\cos(t)} - \frac{4\sin(t)^2}{(1+2\cos(t))^2} \tag{10}$$

factor(*simplify*(%));

$$-\frac{2\,(\cos(t)+2)}{(1+2\cos(t))^2} \tag{11}$$

Ceci prouve bien la bijection décroissante.
On suppose alors a différent de 1. On a alors
eq2;

$$\left\{\cos(t) = \frac{1}{2}\,\frac{-x+a}{-1+x}, \sin(t) = -\frac{1}{2}\,\frac{y\,(-1+a)}{-1+x}\right\} \tag{12}$$

$coni := subs\left(eq2, \cos(t)^2 + \sin(t)^2 - 1 = 0\right);$

$$\frac{1}{4}\,\frac{(-x+a)^2}{(-1+x)^2} + \frac{1}{4}\,\frac{y^2\,(-1+a)^2}{(-1+x)^2} - 1 = 0 \tag{13}$$

$coni := factor(\%);$

$$\frac{1}{4}\,\frac{-3\,x^2 - 2\,x\,a + a^2 + y^2 - 2\,y^2\,a + y^2\,a^2 - 4 + 8\,x}{(-1+x)^2} = 0 \tag{14}$$

$coni := numer(lhs(\%));$

$$-3\,x^2 - 2\,x\,a + a^2 + y^2 - 2\,y^2\,a + y^2\,a^2 - 4 + 8\,x \tag{15}$$

$collect(coni, \{x, y\});$

$$-3\,x^2 + (-2\,a + 8)\,x + \left(1 - 2\,a + a^2\right)\,y^2 + a^2 - 4 \tag{16}$$

Ce qui l'équation de la conique
On en recherche le centre
$solve(\{diff\,(coni, x), diff\,(coni, y)\}, \{x, y\});$

$$\left\{x = -\frac{1}{3}\,a + \frac{4}{3}, y = 0\right\} \tag{17}$$

$subs\left(\left\{x = X + \left(-\frac{1}{3}\,a + \frac{4}{3}\right), y = Y\right\}, coni\right);$

$$-3\left(X - \frac{1}{3}\,a + \frac{4}{3}\right)^2 - 2\left(X - \frac{1}{3}\,a + \frac{4}{3}\right)a + a^2 + Y^2 - 2\,Y^2\,a + Y^2\,a^2 + \frac{20}{3} + 8\,X - \frac{8}{3}\,a \tag{18}$$

$expand(\%);$

$$-3\,X^2 + \frac{4}{3}\,a^2 - \frac{8}{3}\,a + \frac{4}{3} + Y^2 - 2\,Y^2\,a + Y^2\,a^2 \tag{19}$$

$collect(\%, \{X, Y\});$

$$\left(1 - 2\,a + a^2\right)Y^2 - 3\,X^2 + \frac{4}{3}\,a^2 - \frac{8}{3}\,a + \frac{4}{3} \tag{20}$$

$coni := \left(1 - 2\,a + a^2\right)Y^2 - 3\,X^2 = -\left(+\frac{4}{3}\,a^2 - \frac{8}{3}\,a + \frac{4}{3}\right);$

$$\left(1 - 2\,a + a^2\right)Y^2 - 3\,X^2 = -\frac{4}{3}\,a^2 + \frac{8}{3}\,a - \frac{4}{3} \tag{21}$$

$coni := map\left(factor, collect\left(\frac{lhs(\%)}{rhs(\%)}, \{X, Y\}\right)\right) = 1;$

$$-\frac{3}{4}\,Y^2 + \frac{9}{4}\,\frac{X^2}{(-1+a)^2} = 1 \tag{22}$$

On a donc une hyperbole.
Pour le cas a=0, on obtient
$coni0 := subs(a = 0, coni);$

$$-\frac{3}{4}\,Y^2 + \frac{9}{4}\,X^2 = 1 \tag{23}$$

On revient au repère initial
$subs\left(\left\{X = x - \left(\frac{4}{3}\right), \mathrm{Y} = y\right\}, coni0\right);$

$$-\frac{3}{4}y^2+\frac{9}{4}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=1 \tag{24}$$

coni01 := %;

$$-\frac{3}{4}y^2+\frac{9}{4}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=1 \tag{25}$$

On peut la tracer, de deux manières.

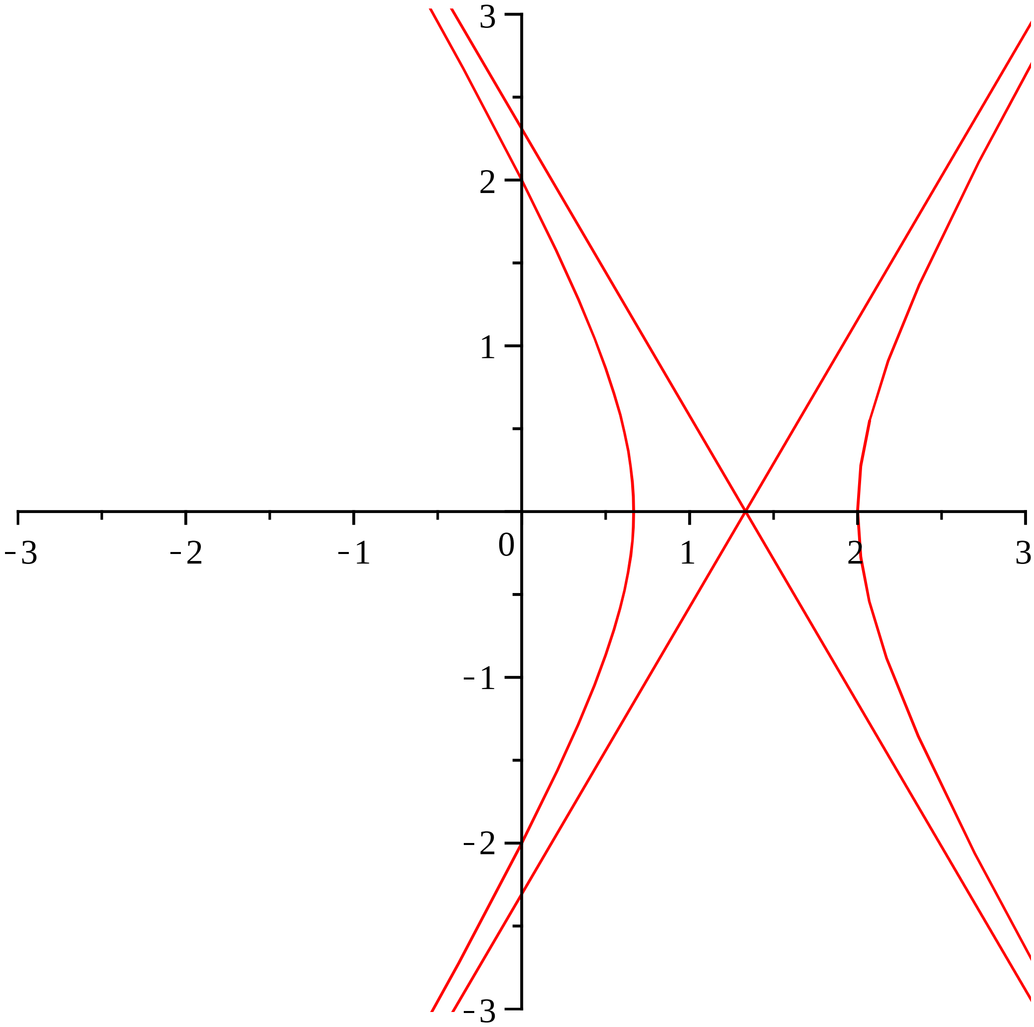
subs(*a* = 0, *eq1*);

$$\left\{y=-\frac{2\sin(t)}{1+2\cos(t)},\ x=\frac{2\cos(t)}{1+2\cos(t)}\right\} \tag{26}$$

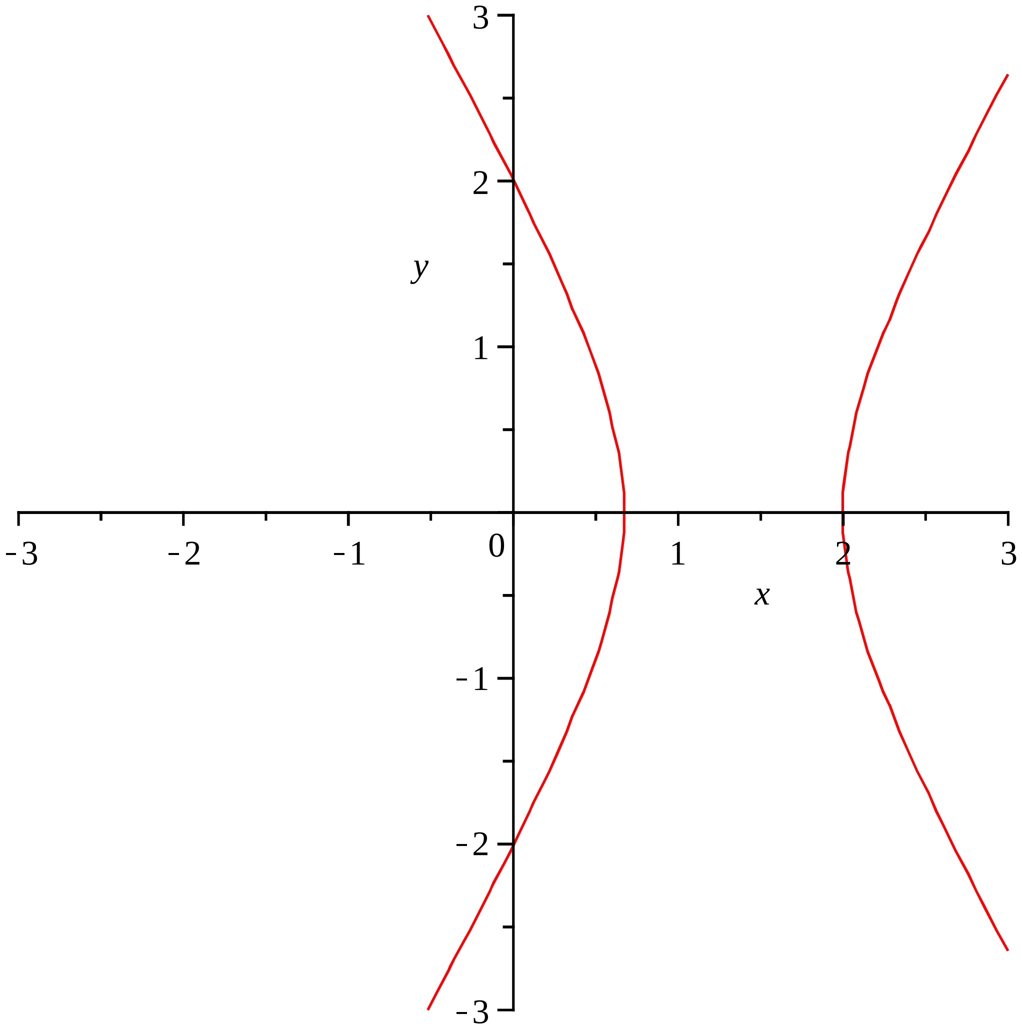
subs(%, [*x*, *y*, *t* = 0 ..2 · Pi]);

$$\left[\frac{2\cos(t)}{1+2\cos(t)},\ -\frac{2\sin(t)}{1+2\cos(t)},\ t=0..2\,\pi\right] \tag{27}$$

plot(%, *view* = [−3 ..3, −3 ..3]);



with(*plots*) : *implicitplot*(*coni01*, *x* =−3 ..3, *y* =−3 ..3, *view* = [−3 ..3, −3 ..3], *scaling* = *constrained*);



On a la même hyperbole (ouf !)