Soit P un polynôme de degré 3, que l'on suppose unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1. Montrer que l'ensemble E des points M de coordonnées (x,y) tels que P(x)=P(y) est,en général, la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité fixe.

On définit le polynôme P.

$P := x \to x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c;$

$$x \to x^3 + a\,x^2 + b\,x + c \tag{1}$$

On commence par factoriser P(x)-P(y), car il est évident que x=y est solution (donc que l'ensemble cherché contient la première bissectrice !).

$factor(P(x) - P(y));$

$$(x-y)\,(x^2 + x\,a + y\,x + b + y\,a + y^2) \tag{2}$$

La conique qui compose l'ensemble E a donc pour équation

$coni := factor\left(\frac{(P(x) - P(y))}{x-y}\right);$

$$x^2 + x\,a + y\,x + b + y\,a + y^2 \tag{3}$$

On réorganise l'expression

$coni := collect(coni, [x, y], `distributed`);$

$$x^2 + x\,a + y\,x + b + y\,a + y^2 \tag{4}$$

C'est clairement une ellipse, on cherche le centre

$solve(\{diff(coni, x), diff(coni, y)\}, \{x, y\});$

$$\left\{x = -\frac{1}{3}\,a, y = -\frac{1}{3}\,a\right\} \tag{5}$$

On se place donc au centre (au passage, les centres sont sur la première bissectrice).

$coni2 := subs\left(\left\{x = X - \frac{a}{3}, y = Y - \frac{a}{3}\right\}, coni\right);$

$$\left(X - \frac{1}{3}\,a\right)^2 + \left(X - \frac{1}{3}\,a\right)a + \left(Y - \frac{1}{3}\,a\right)\left(X - \frac{1}{3}\,a\right) + b + \left(Y - \frac{1}{3}\,a\right)a + \left(Y - \frac{1}{3}\,a\right)^2 \tag{6}$$

$coni2 := expand(coni2);$

$$X^2 - \frac{1}{3}\,a^2 + Y\,X + b + Y^2 \tag{7}$$

Reste à faire une rotation,

$subs(\{X = \cos(t) \cdot X1 - \sin(t) \cdot Y1, Y = \sin(t) \cdot X1 + \cos(t) \cdot Y1\}, coni2);$

$$(\cos(t)\,X1 - \sin(t)\,Y1)^2 - \frac{1}{3}\,a^2 + (\sin(t)\,X1 + \cos(t)\,Y1)\,(\cos(t)\,X1 - \sin(t)\,Y1) + b + (\sin(t)\,X1 + \cos(t)\,Y1)^2 \tag{8}$$

$expand(\%);$

$$\cos(t)^2\,X1^2 + \sin(t)^2\,Y1^2 - \frac{1}{3}\,a^2 + \sin(t)\,X1^2\cos(t) - \sin(t)^2\,X1\,Y1 + \cos(t)^2\,Y1\,X1 - \cos(t)\,Y1^2\sin(t) + b + \sin(t)^2\,X1^2 + \cos(t)^2\,Y1^2 \tag{9}$$

$collect(\%, [X1, Y1], `distributed`);$

$$-\frac{1}{3}a^2+b+\left(-\sin(t)^2+\cos(t)^2\right)Y1\,X1+\left(\cos(t)^2+\sin(t)\cos(t)+\sin(t)^2\right)X1^2 + \left(\sin(t)^2-\sin(t)\cos(t)+\cos(t)^2\right)Y1^2 \tag{10}$$

Un angle de $\pi/4$ convient

$subs\left(t=\frac{\pi}{4}, \%\right);$

$$-\frac{1}{3}a^2+b+\left(-\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)^2+\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)^2\right)Y1\,X1+\left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)^2 + \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)+\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)^2\right)X1^2+\left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)^2-\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)^2\right)Y1^2 \tag{11}$$

$expand(\%);$

$$-\frac{1}{3}a^2+b+\frac{3}{2}X1^2+\frac{1}{2}Y1^2 \tag{12}$$

L'équation de la conique dans le repère dont la seconde bissectrice est l'axe focal est donc

$\frac{3}{2}X1^2+\frac{1}{2}Y1^2=\frac{1}{3}a^2-b$

$$\frac{3}{2}X1^2+\frac{1}{2}Y1^2=\frac{1}{3}a^2-b \tag{13}$$

On obtient donc une ellipse, sauf si $b=\frac{a^2}{3}$: . ou si $\frac{1}{3}a^2-b<0$. Dans le premier cas, on a

$subs\left(b=\frac{1}{3}a^2, P(x)\right);$

$$x^3+a\,x^2+\frac{1}{3}a^2x+c \tag{14}$$

$diff(\%, x);$

$$3x^2+2\,x\,a+\frac{1}{3}a^2 \tag{15}$$

$factor(\%);$

$$\frac{1}{3}(a+3x)^2 \tag{16}$$

Le polynôme P est donc une primitive de $\frac{1}{3}(a+3x)^2$:

Pour le calcul de l'excentricté, on a

$e=\frac{\mathrm{sqrt}\left(2-\frac{2}{3}\right)}{2};$

$$e=\frac{1}{3}\sqrt{3} \tag{17}$$