Déterminer a et b pour que l'arc paramétré défini par
$x := t \to t + a/t$^2;

$$t \to t + \frac{a}{t^2} \tag{1.1}$$

$y := t \to 1/t$^2 $+ b/(1+t)$;

$$t \to \frac{1}{t^2} + \frac{b}{1+t} \tag{1.2}$$

ait un point stationnaire au point de paramètre α non nul. Déterminer, les valeurs de a,b et t pour lesquelles il s'agit d'un rebroussement de seconde espèce.

On commence par calculer le vecteur vitesse au point de paramètre α. Ce vecteur doit être nul.
$v := (\{diff(x(\alpha), \alpha), diff(y(\alpha), \alpha)\})$;

$$\left\{1 - \frac{2a}{\alpha^3}, -\frac{2}{\alpha^3} - \frac{b}{(1+\alpha)^2}\right\} \tag{1}$$

$sol := solve(v, \{a, b\})$;

$$\left\{a = \frac{1}{2}\alpha^3, b = -\frac{2\left(1+2\alpha+\alpha^2\right)}{\alpha^3}\right\} \tag{2}$$

Ce qui donne a et b en fonction de α : . L'arc paramétré est donc défini par
$M := subs(sol, [x(t), y(t)])$;

$$\left[t + \frac{1}{2}\frac{\alpha^3}{t^2}, \frac{1}{t^2} - \frac{2\left(1+2\alpha+\alpha^2\right)}{\alpha^3(1+t)}\right] \tag{3}$$

On fait ensuite un développement limité, mais on se ramène en 0 en posant $t = \alpha + h$:
$Mh := subs(t = \alpha + h, M)$;

$$\left[\alpha + h + \frac{1}{2}\frac{\alpha^3}{(\alpha+h)^2}, \frac{1}{(\alpha+h)^2} - \frac{2\left(1+2\alpha+\alpha^2\right)}{\alpha^3(1+\alpha+h)}\right] \tag{4}$$

$X := convert(taylor(Mh[1], h = 0, 5), polynom)$;

$$\frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2}\frac{h^2}{\alpha} - \frac{2h^3}{\alpha^2} + \frac{5}{2}\frac{h^4}{\alpha^3} \tag{5}$$

$Y := convert(taylor(Mh[2], h = 0, 5), polynom)$;

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2\left(1+2\alpha+\alpha^2\right)}{\alpha^3(1+\alpha)} + \left(-\frac{2}{\alpha^3(1+\alpha)} + \frac{3}{\alpha^4}\right)h^2 + \left(\frac{2}{\alpha^3(1+\alpha)^2} - \frac{4}{\alpha^5}\right)h^3 + \left(\frac{5}{\alpha^6} - \frac{2}{\alpha^3(1+\alpha)^3}\right)h^4 \tag{6}$$

Pour avoir un rebroussement de seconde espèce les vecteurs en h^2 : et h^3 : doivent être colinéaires
$A := \langle\langle coeff(X, h, 2) \mid coeff(X, h, 3)\rangle, \langle coeff(Y, h, 2) \mid coeff(Y, h, 3)\rangle\rangle$;

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2\alpha} & -\frac{2}{\alpha^2} \\ -\frac{2}{\alpha^3(1+\alpha)} + \frac{3}{\alpha^4} & \frac{2}{\alpha^3(1+\alpha)^2} - \frac{4}{\alpha^5} \end{bmatrix} \quad \textbf{(7)}$$

$R := LinearAlgebra\text{:-}Determinant(\ A\ );$

$$-\frac{\alpha+4}{\alpha^5(1+\alpha)^2} \quad \textbf{(8)}$$

Pour α=-4, on a donc "une chance" que cela marche !

$subs(\alpha=-4, X);$

$$-6 - \frac{3}{8}h^2 - \frac{1}{8}h^3 - \frac{5}{128}h^4 \quad \textbf{(9)}$$

$subs(\alpha=-4, Y);$

$$-\frac{1}{32} + \frac{1}{768}h^2 + \frac{1}{2304}h^3 + \frac{7}{110592}h^4 \quad \textbf{(10)}$$

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{128}} = \frac{\frac{1}{768}}{\frac{7}{110592}};$$

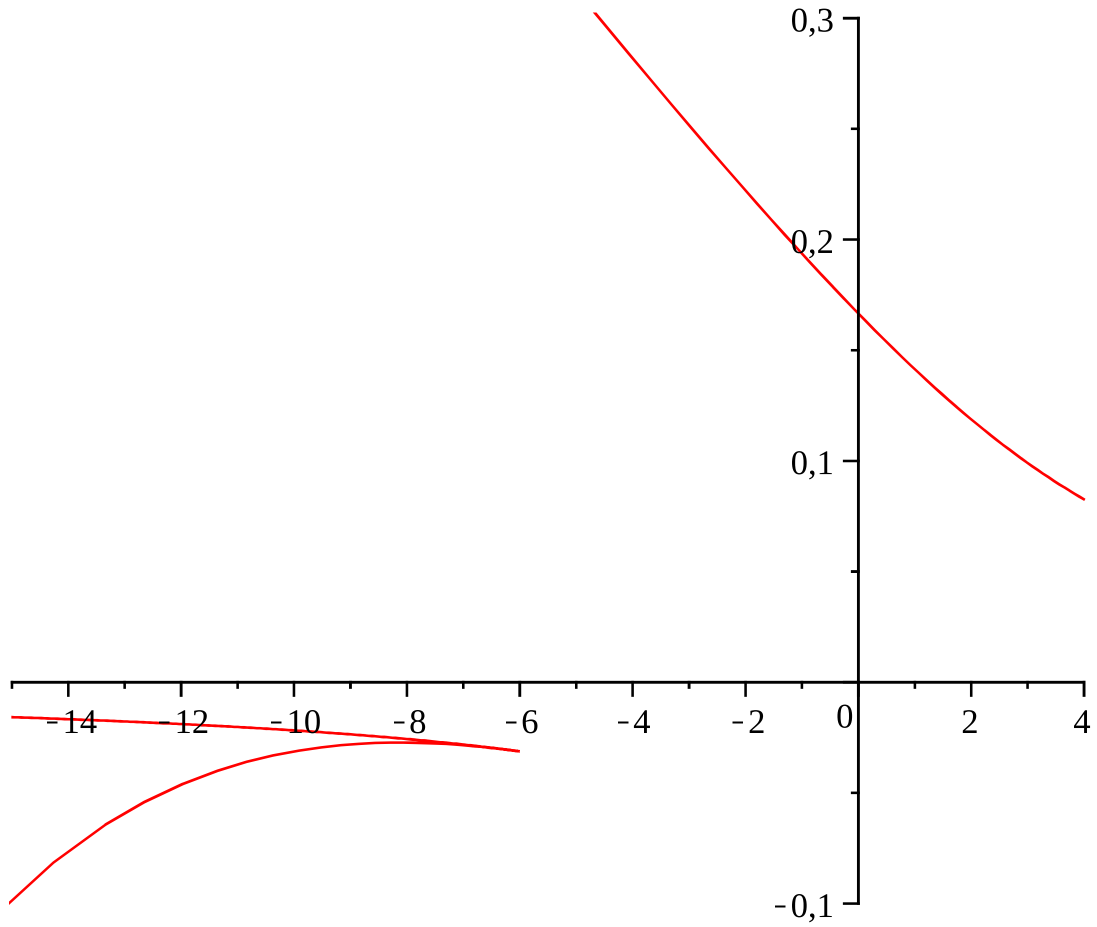
$$\frac{48}{5} = \frac{144}{7} \quad \textbf{(11)}$$

On a bien un rebroussement de seconde espèce. Reste à tracer tout cela.

$subs(\alpha=-4, M);$

$$\left[t - \frac{32}{t^2}, \frac{1}{t^2} + \frac{9}{32(1+t)}\right] \quad \textbf{(12)}$$

$plot(\,[op(\%), t=-50..10], view=[-15..4, -0.1..0.3], numpoints=1000);$



0,3
0,2
0,1
-0,1
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4