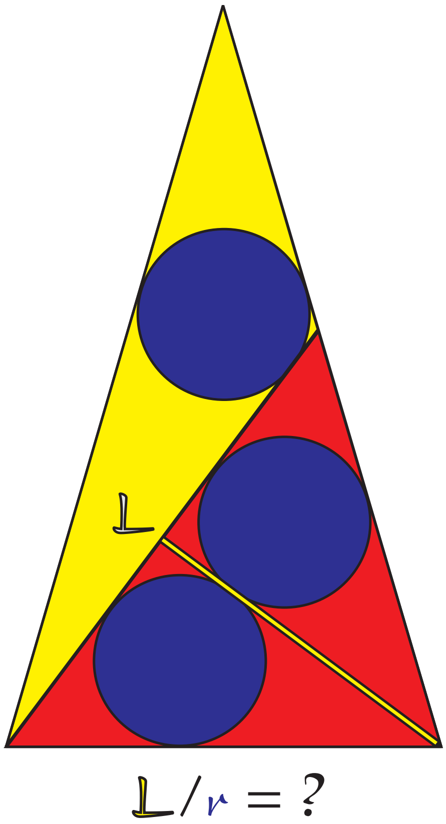
Un sangaku

G.Huvent

21 décembre 2009

Dans leur livre "Sacred Mathematics" H.Fukagawa et T.Rothman proposent le sangaku suivant.

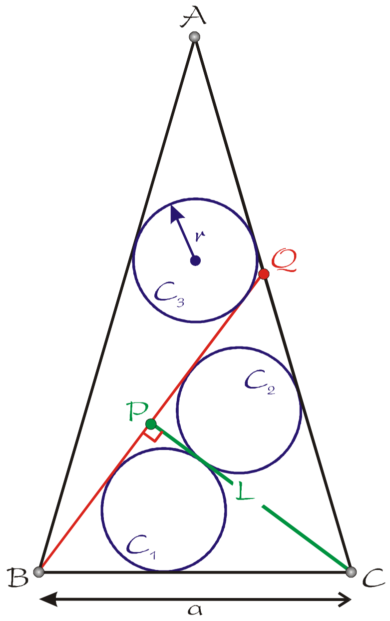


Ils en donnent une demonstration relativement compliquée. L'objet de ce document est de proposer une preuve alternative plus simple et basée sur des considérations trigonométriques.

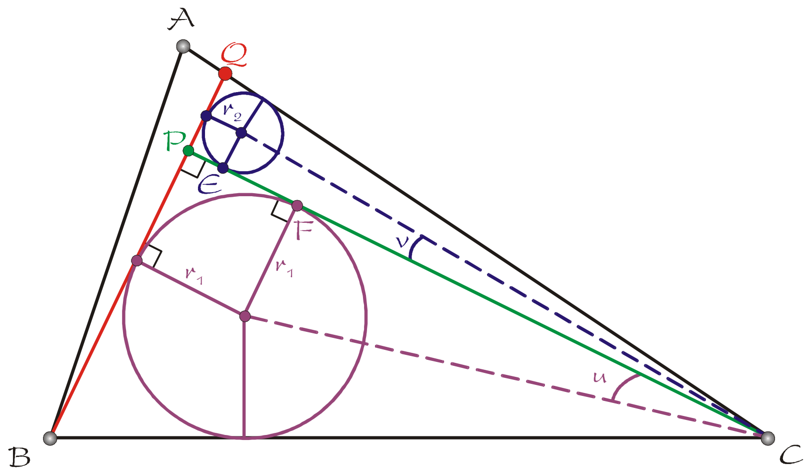
Enoncé du sangaku :

Soit ABC un triangle, Q un point du côté AC, on construit ainsi le point P pied de la hauteur issue de C dans le triangle

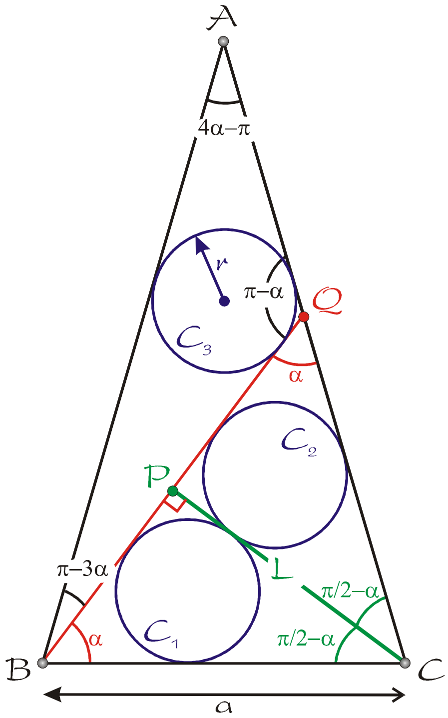
BQC. On suppose que les cercles inscrits aux triangles ABQ, BCP et CPQ ont même rayon r.



On demande de calculer le rapport $\frac{L}{r}$ où L est la longueur de CP et r le rayon commun des trois cercles.
On commence par prouver que le triangle BCQ est isocèle. En effet si l'on considère un triangle ABC, un point Q sur AC tel que le pied P de la hauteur issue de C au triangle BCQ soit sur le segment BQ. On construit alors deux cercles inscrits aux triangles BCP et CPQ, ces cercles ont, a priori, des rayons différents r_1 et r_2. Puisque CP est orthogonale à BQ, on est en présence de deux carrés indiqués sur la figure suivante. Si les deux cercles ont même rayon, on en déduit que les points E et F où ils touchent la hauteur CP sont confondus et ainsi les angles u et v sont égaux. En particulier la hauteur CP dans la figure du sangaku devient la bissectrice de l'angle $\widehat{C}$.



Les triangles CPB et CPQ ont alors mêmes angles et un côté commun donc sont isométriques. On complète ainsi le schéma en introduisant l'angle $\alpha = \widehat{CPB}$. On en déduit alors les autres angles indiqués sur le schéma suivant.



Le calcul de r dans le triangle BCP donne

$$r = \frac{BP + PC - BC}{2} = a\frac{\cos\alpha + \sin\alpha - 1}{2}$$

Le calcul de r dans le triangle ABQ donne

$$\begin{aligned}
r &= BQ\frac{\sin\left(\dfrac{\pi - 3\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi-\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{4\alpha - \pi}{2}\right)} = 2BP\frac{\cos\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha} \\
&= 2a\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2a\frac{\cos\alpha}{4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha}\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\
&= \frac{a}{2}\frac{\cos\left(\alpha + \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2}\left(\cos\alpha\,\mathrm{cotan}\,\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha\right)
\end{aligned}$$

En posant $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$, on obtient deux expressions de r, à savoir

$$r = \frac{a}{2}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} - 1\right) = a\frac{t\,(1-t)}{t^2+1}$$

et

$$r = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{t}\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}\right) = \frac{a}{2}\frac{1-3t^2}{t\,(1+t^2)}$$

Ainsi

$$2t^2\,(1-t) = 1 - 3t^2 \iff 2t^3 - 5t^2 + 1 = 0$$

Les racines de ce polynôme sont $\dfrac{1}{2}, 1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$. Les deux dernières sont à éliminer car elles conduisent à $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2} = -1$ qui est impossible. On a donc

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}}$$

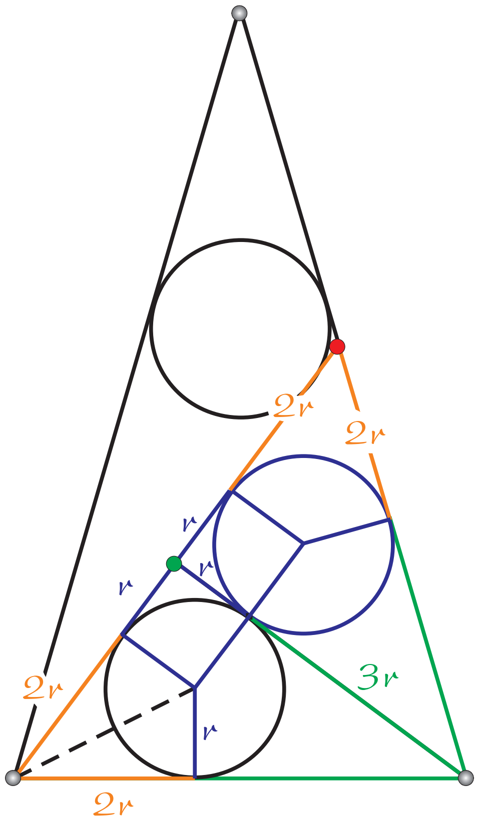
Cette relation permet une construction facile de la figure, puis $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}$

$$r = \frac{a}{5} \text{ et } CP = a\sin\alpha = \frac{4}{5}a$$

d'où

$$\boxed{\frac{L}{r} = 4}$$

La valeur de t permet de justifier les longueurs sur la figure suivante



On peut aussi calculer le rayon R du cercle inscrit à ABC qui vaut $\dfrac{a}{2}\tan\left(\widehat{BCA}\right) = \dfrac{15}{8}r$.