Une chaîne de cercles

G.Huvent

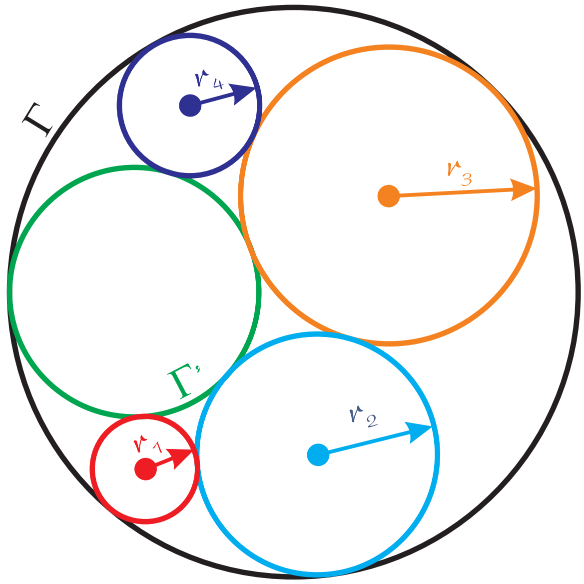
24 juin 2010

Les deux sangaku dont la résolution est proposée ici sont traditionnellement résolus à l'aide de l'inversion. Il est cependant possible de se passer de cet outil qui n'est plus guère enseigné et d'utiliser des considérations trigonométriques. On pourra s'étonner des simplications quasi miraculeuses qui permettent de résoudre les deux problèmes posés.

1 Cinq cercles tangents intérieurement à même cercle.

Le premier problème est issu d'un livre publié en 1810 par Sanpo Tenshosho Sinan et Anmei Aida. Il est probable qu'il provienne d'une tablette ayant existée et qui aurait été détruite.

On considère deux cercles Γ et Γ' tels que Γ' soit tangent intérieurement à Γ. On place une chaine de quatre cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ tangents intérieurement à Γ, extérieurement à Γ' et tel que $\mathcal{C}_2$ soit tangent à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_3$ à $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$ comme indiqué sur la figure suivante.

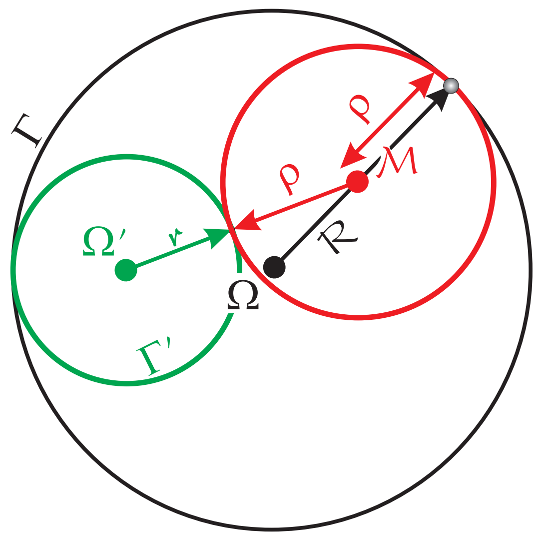


On demande de prouver la relation suivante sur les rayons r_1, r_2, r_3 et r_4 des quatre cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{3}{r_3} = \frac{1}{r_4} + \frac{3}{r_2}$$

On note Ω et Ω' les centres de Γ et Γ', R et r désignent leur rayon. Soit $\mathcal{C}$ un cercle, de centre M et et de rayon ρ, tangent intérieurement à Γ et extérieurement à Γ', on a alors

$$\Omega M = R - \rho \text{ et } \Omega' M = r + \rho$$



On en déduit que

$$\Omega M + \Omega' M = R + r$$

Ainsi les centres des cercles tangents, intérieurement à Γ et extérieurement à Γ', sont sur une ellipse de foyer Ω et Ω' et de grand axe $2a = R + r$. Puisque la distance entre les deux foyers vaut $R - r$, on en déduit que le demi petit axe b, qui vérifie $4b^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2$, vaut $b = \sqrt{Rr}$.

On se place dans le repère orthonormé ayant pour origine le point Ω, centre de Γ. Le centre de l'ellipse a pour coordonnées $\left(-\dfrac{R-r}{2}, 0\right)$. On considère alors un point M, centre d'un cercle tangent intérieurement à Γ et extérieurement à Γ'. Ce point M est sur l'ellipse que l'on vient de caractériser, il existe donc φ tel que les coordonnées de M soient

$$M : \left(-\frac{R-r}{2} + \frac{R+r}{2}\cos\varphi, \sqrt{Rr}\sin\varphi\right)$$

en posant $t = \tan\dfrac{\varphi}{2}$, on obtient, avec $\cos\varphi = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$$M : \left(\frac{r - Rt^2}{1+t^2}, \frac{2t\sqrt{Rr}}{1+t^2}\right)$$

On convient d'appeler t, le paramètre associé au point M. Le cercle de centre M et de rayon ρ est tangent intérieurement à Γ et extérieurement à Γ' si et seulement si, compte tenu du fait que les coordonnées de Ω' sont $(-R+r, 0)$

$$\begin{aligned}
\Omega M^2 = (R-\rho)^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{r-Rt^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t\sqrt{Rr}}{1+t^2}\right)^2 = (R-\rho)^2 \\
\text{et} \quad \Omega' M^2 = (r+\rho)^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(-R + r - \frac{r-Rt^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t\sqrt{Rr}}{1+t^2}\right)^2 = (r+\rho)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{rt^2-R}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t\sqrt{Rr}}{1+t^2}\right)^2 = (r+\rho)^2
\end{aligned}$$

Par différence des deux équations, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{r-Rt^2}{1+t^2}\right)^2-\left(\frac{rt^2-R}{1+t^2}\right)^2=(R-\rho)^2-(r+\rho)^2 \\
\iff\quad & \frac{(R+r)\left(1-t^2\right)(r-R)\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}=(R+r)(R-r-2\rho) \\
\iff\quad & (R-r)\frac{t^2-1}{t^2+1}=(R-r)-2\rho \\
\iff\quad & \rho=\frac{R-r}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Si on considère maintenant deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tangents entre eux, intérieurement à Γ et extérieurement à Γ'. Soient M et N leurs centres et t et u les paramètres associés. Les coordonnées des centres sont donc

$$\begin{aligned}
M &: \left(\frac{r-Rt^2}{1+t^2},\frac{2t\sqrt{Rr}}{1+t^2}\right) \\
N &: \left(\frac{r-Ru^2}{1+u^2},\frac{2u\sqrt{Rr}}{1+u^2}\right)
\end{aligned}$$

et les rayons de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont $\rho=\dfrac{R-r}{1+t^2}$ et $\rho'=\dfrac{R-r}{1+u^2}$. La condition de tangence entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ s'écrit alors

$$MN^2=\left(\rho+\rho'\right)^2$$

Soit

$$\left(\frac{r-Rt^2}{1+t^2}-\frac{r-Ru^2}{1+u^2}\right)^2+\left(\frac{2t\sqrt{Rr}}{1+t^2}-\frac{2u\sqrt{Rr}}{1+u^2}\right)^2=\left(\frac{R-r}{1+t^2}+\frac{R-r}{1+u^2}\right)^2$$

ce qui donne

$$\left(\left(r-Rt^2\right)\left(1+u^2\right)-\left(r-Ru^2\right)\left(1+t^2\right)\right)^2+4Rr\left(t\left(1+u^2\right)-u\left(1+t^2\right)\right)^2=(R-r)^2\left(2+u^2+t^2\right)^2$$

soit après factorisation de chaque terme

$$(t-u)^2\left[(R+r)^2(t+u)^2+4Rr(tu-1)^2\right]=(R-r)^2\left(2+u^2+t^2\right)^2$$

On retranche de chaque côté de l'égalité le terme $(R-r)^2(t-u)^2(t+u)^2$ pour obtenir

$$(t-u)^2\left[(R+r)^2(t+u)^2-(R-r)^2(t+u)^2+4Rr(tu-1)^2\right]=(R-r)^2\left[\left(2+u^2+t^2\right)^2-\left(t^2-u^2\right)^2\right]$$

soit

$$4Rr(t-u)^2\left((t+u)^2+(tu-1)^2\right)=4(R-r)^2\left(u^2+1\right)\left(t^2+1\right)$$

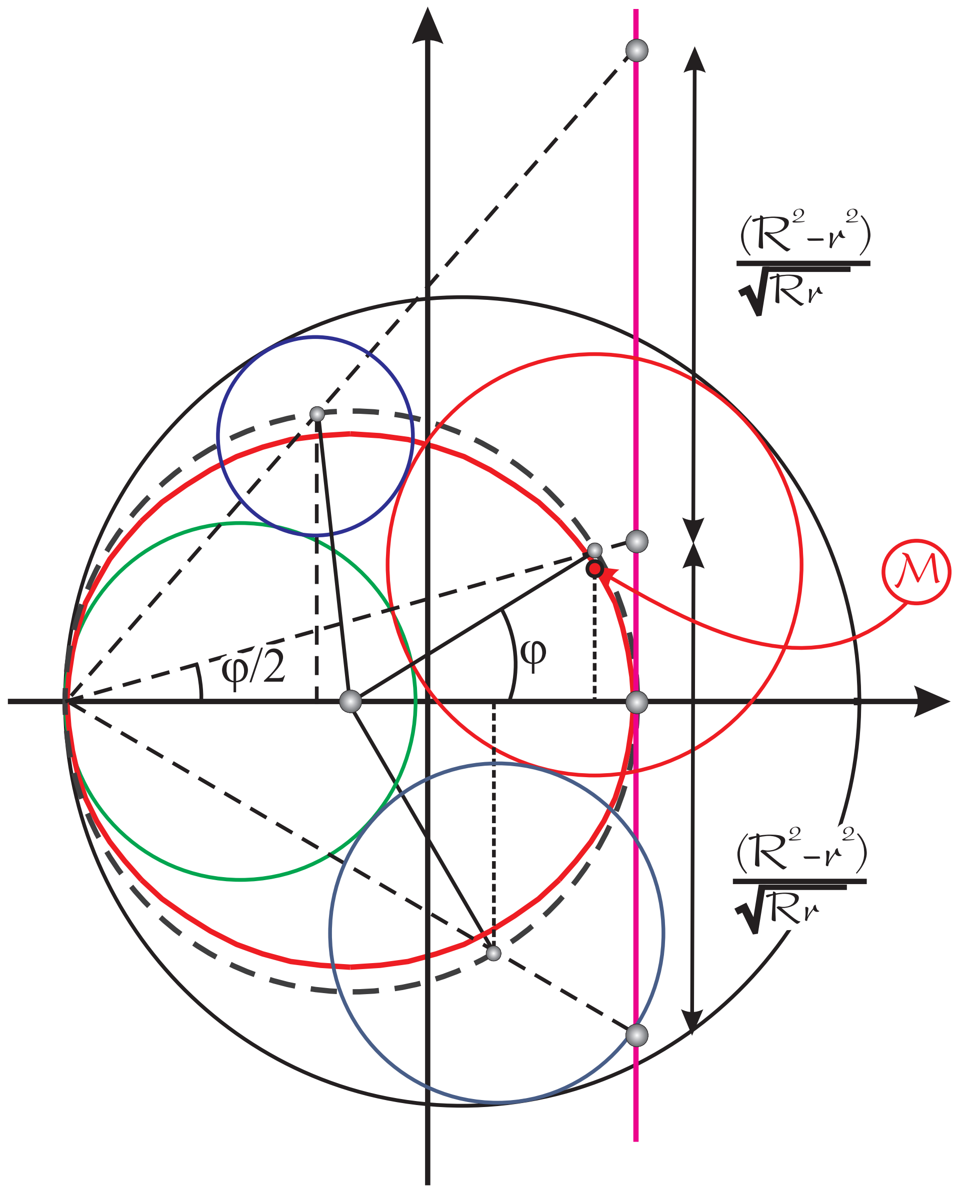
on simplifie cela avec l'égalité $(t+u)^2+(tu-1)^2=\left(t^2+1\right)\left(u^2+1\right)$ pour obtenir enfin

$$(t-u)^2=\left(\frac{R-r}{\sqrt{Rr}}\right)^2$$

ce qui signifie que

$$t=u+\frac{R-r}{\sqrt{Rr}}\text{ ou }t=u-\frac{R-r}{\sqrt{Rr}}$$

Si on paramètre l'ellipse avec $\varphi \in]-\pi, \pi[$, alors t varie de $-\infty$ à $+\infty$, et lorsque l'on décrit une chaine de cercles tangents, si l'on passe d'un cercle à un autre en suivant le sens trigonométrique, les paramètres t des cercles décrivent donc une suite arithmétique de raison $k = \dfrac{R-r}{\sqrt{Rr}}$.



On peut maintenant prouver le sangaku, si t_1 est le paramètre du cercle $\mathcal{C}_1$ alors $r_1 = \dfrac{R-r}{1+t_1^2}$, les paramètres de $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont alors $t_2 = t_1 + k$, $t_3 = t_1 + 2k$ et $t_4 = t_1 + 3k$. Pour prouver la relation annoncée, il suffit d'établir que

$$\begin{array}{ll} & t_1^2 + 3t_3^2 = t_4^2 + 3t_2^2 \\ \Longleftrightarrow & t_4^2 - t_1^2 = 3\left(t_3^2 - t_2^2\right) \\ \Longleftrightarrow & (t_4 - t_1)(t_4 + t_1) = 3(t_3 - t_2)(t_3 + t_2) \\ \Longleftrightarrow & 3k(2t_1 + 3k) = 3k(2t_1 + 3k) \end{array}$$

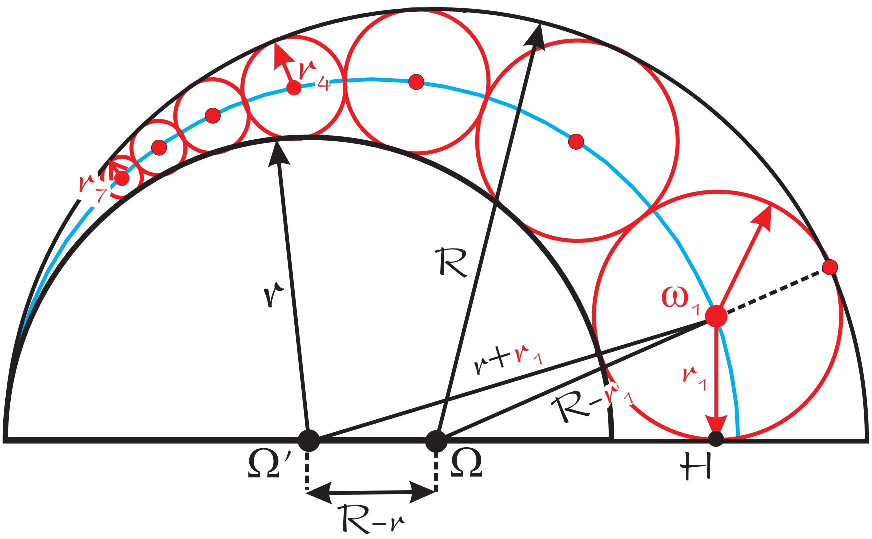
On a donc bien prouvé que

$$\boxed{\frac{1}{r_1}+\frac{3}{r_3}=\frac{1}{r_4}+\frac{3}{r_2}}$$

2 Une chaîne de cercles

Le second problème est issu d'une tablette datée de 1814 et qui se trouve dans la préfecture de Gunma.

On considère deux demi-cercles de rayons R et r tangents intérieurement. On place entre ces deux demi-cercles une chaîne de sept cercles tangents entre eux et tangents aux deux demi-cercles comme indiqué sur la figure. En particulier le premier cercle est tangent au diamètre commun des deux demi-cercles.



Il s'agit de prouver que les rayons du premier, du dernier et du cercle médian sont reliés par la relation :

$$\frac{7}{r_4}=\frac{2}{r_7}+\frac{5}{r_1}$$

On utilise les résultats établis dans le précédent sangaku. On sait que les centres des sept cercles sont sur une ellipse que l'on peut paramètrer par

$$M(\varphi)=\left(-\frac{R-r}{2}+\frac{R+r}{2}\cos\varphi,\sqrt{Rr}\sin\varphi\right)$$

En posant $t=\tan\frac{\varphi}{2}$, la suite des paramètres $t_1,\cdots,t_7$ des centres des cercles est une suite arithmétique, à termes positifs et de raison $\rho=\frac{R-r}{\sqrt{Rr}}$. On a également montré que le rayon du $k^{\text{ième}}$ cercle est alors $r_k=\frac{R-r}{1+t_k^2}$. Il s'agit donc de prouver que

$$7t_4^2=2t_7^2+5t_1^2$$

sachant que $t_7=t_1+6\rho$ et $t_4=t_1+3\rho$. En remplaçant, cela équivaut à

$$2\left(t_7^2-t_4^2\right)=5\left(t_4^2-t_1^2\right)\Longleftrightarrow 2\left(2t_1+9\rho\right)=5\left(2t_1+3\rho\right)\Longleftrightarrow t_1=\frac{\rho}{2}=\frac{R-r}{2\sqrt{Rr}}$$

Le problème se réduit à montrer que le rayon du premier cercle de la chaîne vaut

$$r_1=\frac{R-r}{1+t_1^2}=\frac{4Rr\left(R-r\right)}{\left(R+r\right)^2}$$

On utilise la formule de Héron dans le triangle $\Omega\Omega'\omega_1$ dont le demi-périmètre vaut $p = \dfrac{r + r_1 + R - r_1 + R - r}{2} = R$ et l'aire $\mathcal{A} = \dfrac{(R - r)r_1}{2}$ ainsi

$$\mathcal{A} = \frac{(R-r)r_1}{2} = \sqrt{Rr_1 r\,(R - r - r_1)} \Longrightarrow \left(\frac{r_1(R-r)}{2}\right)^2 = r_1 rR(R - r - r_1)$$

qui admet deux solutions $r_1 = 0$, à exclure, et $r_1 = \dfrac{4Rr\,(R-r)}{(R+r)^2}$. On a donc prouvé que

$$\boxed{\frac{7}{r_4} = \frac{2}{r_7} + \frac{5}{r_1}}$$

Remarque : La solution $r_1 = 0$ correspond au "cercle-point" de contact des deux demi-cercles.
On peut également établir d'autres relations du même genre que celle que l'on vient de prouver, par exemple, on a $\dfrac{3}{r_2} = \dfrac{1}{r_3} + \dfrac{2}{r_2}$. L'auteur du sangaku a préféré prendre 7 cercles, le premier, le dernier et celui du milieu.