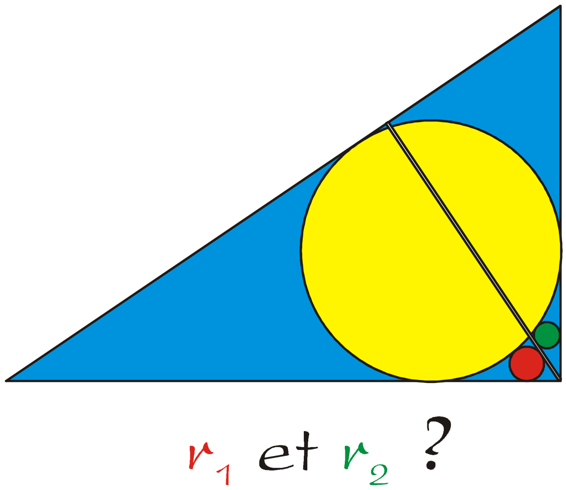
Trois cercles dans un triangle rectangle : Un sangaku de la préfecture de Nagano.

G.Huvent

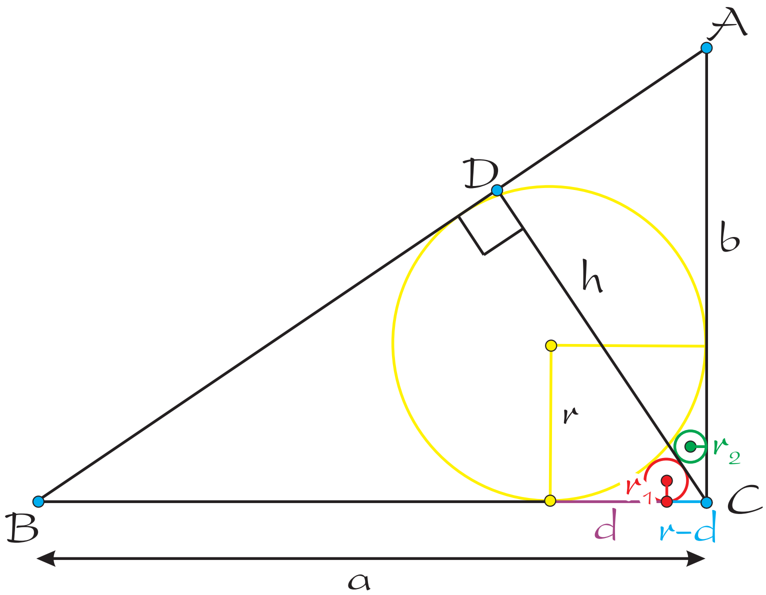
21 décembre 2009



Ce sangaku est le dernier d'une série de quatre problèmes peints sur une tablette de 97×232 cm, exposée dans le sanctuaire shimizu, ville de Nagano. Etant donné un triangle rectangle ABC, on note $\mathcal{C}$ son cercle inscrit et D le pied de la hauteur issue de C. Ce point détermine deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tangents à $\mathcal{C}$, à la hauteur CD et respectivement aux côtés CB et CA. On demande d'exprimer r_1 et r_2 en fonction du rayon r de $\mathcal{C}$ et des longueurs a et b respectivement. Les notations sont celles de la figure. En particulier, on note d la distance entre les points où les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ sont tangents avec le côté BC. On sait alors (cf le premier sangaku de [1]), que

$$d = 2\sqrt{rr_1}$$

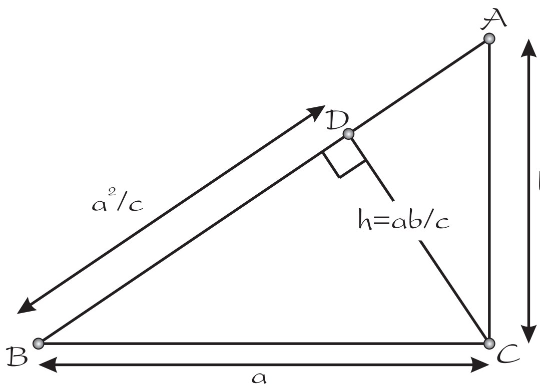
FIG. 1 –



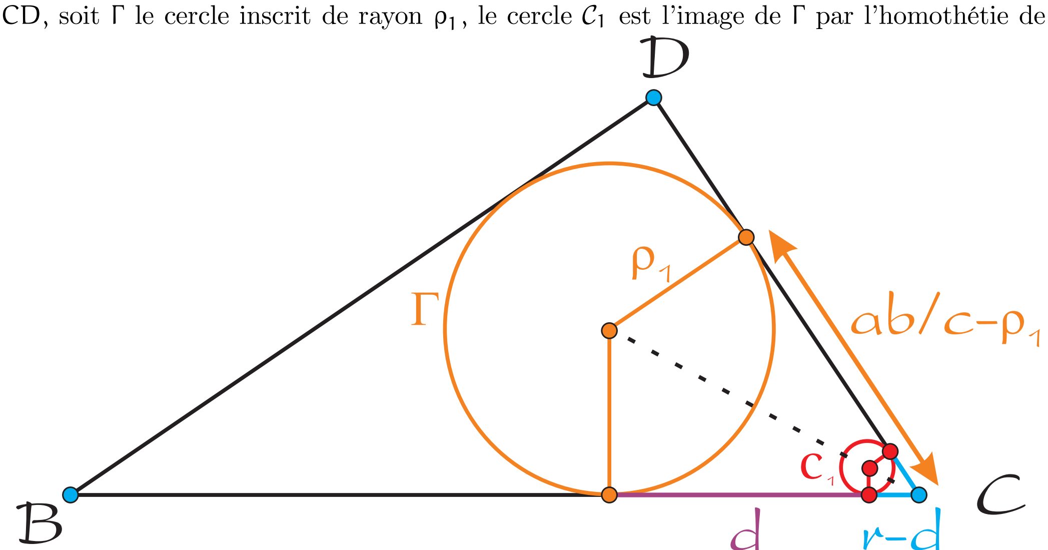
On procède par étapes. On commence par déterminer les longueurs des côtés du triangle CDB en fonctions de celles de ABC. Les deux triangles sont semblables, $ABC \backsim CBD$, si on note $h = CD$ la hauteur, on a alors

$$\begin{aligned}
\frac{CD}{AC} &= \frac{h}{b} = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{c} \Longrightarrow CD = h = b \times \frac{a}{c} \\
\frac{BD}{BC} &= \frac{CB}{AB} \Longrightarrow BD = a \times \frac{a}{c} \text{ et } BC = a = c \times \frac{a}{c}
\end{aligned}$$

ce que résume le dessin suivant.



Dans le traingle BCD, soit Γ le cercle inscrit de rayon ρ_1, le cercle $\mathcal{C}_1$ est l'image de Γ par l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{r_1}{\rho_1}$.



Le triangle BCD étant semblable à ABC, on a $\rho_1 = \frac{a}{c}r$, on en déduit que $\frac{a}{c}b - \rho_1 = \frac{a}{c}(b-r) = \frac{a}{c}\left(b - \frac{a+b-c}{2}\right) = \frac{a}{c}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)$. Les cercles Γ et $\mathcal{C}_1$ étant homothétiques, on a

$$\frac{r-d}{\frac{ab}{c} - \rho_1} = \frac{r_1}{\rho_1} \Longleftrightarrow \frac{r-d}{\frac{a}{c}(b-r)} = \frac{r_1}{\frac{a}{c}r} \Longrightarrow r_1 = r\frac{r-d}{b-r} \Longrightarrow (b-r)\, r_1 - r^2 + rd = 0$$

Avec $d = 2\sqrt{r}\sqrt{r_1}$, on en déduit que $\sqrt{r_1}$ est racine de l'équation du second degré

$$(b-r)\, X^2 + 2r\sqrt{r}X - r^2 = 0$$

dont la racine positive est (le produit des racines est $\frac{r^2}{b-r} < 0$)

$$\frac{-r\sqrt{r} + r\sqrt{b}}{b-r} = r\frac{-\sqrt{r} + \sqrt{b}}{\left(\sqrt{b} - \sqrt{r}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{r}\right)} = \frac{r}{\sqrt{b} + \sqrt{r}}$$

On a donc montré que

$$r_1 = \left(\frac{r}{\sqrt{b} + \sqrt{r}}\right)^2 \quad \text{et } r_2 = \left(\frac{r}{\sqrt{a} + \sqrt{r}}\right)^2$$

Références

[1] Géry Huvent. « Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises ». (Dunod, Novembre 2008).