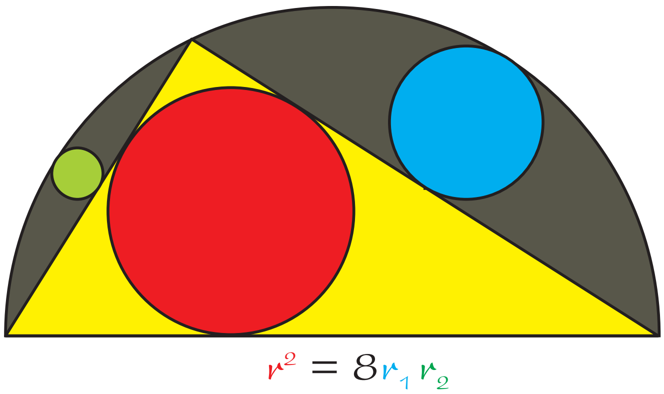
Wasan

G.Huvent

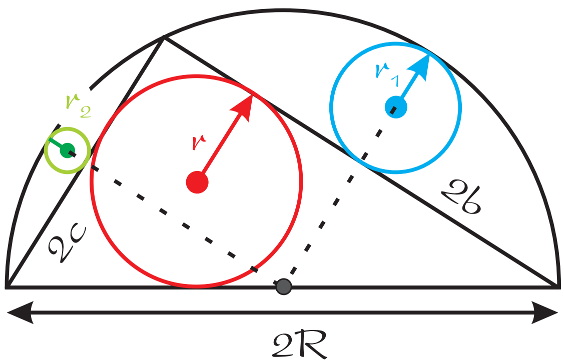
21 décembre 2009

Les résultats qui suivent, sans être tous des sangaku extraits de tablettes peuvent être classés dans les problèmes typiques de la mathématique traditionnelle japonaise : Le Wasan.

1 Trois cercles



Les notations sont celles de la figure.



On a $c + 2r_1 = R$ et de même $b + 2r_2 = R$. Or $r = b + c - R$ d'où

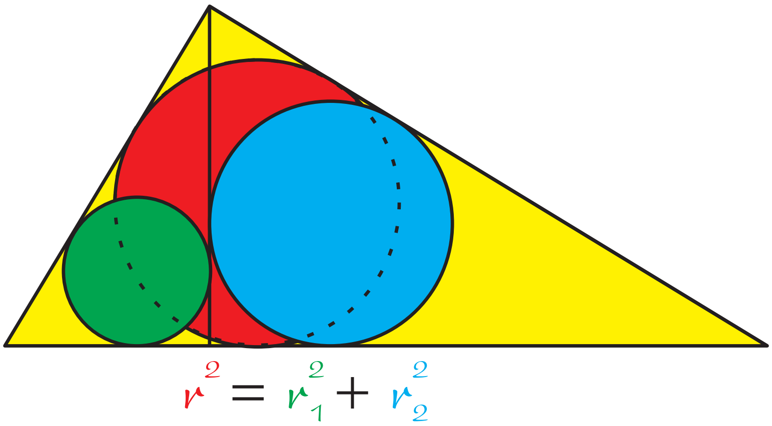
$$r = 2R - 2(r_1 + r_2) - R \Longrightarrow R = r + 2(r_1 + r_2)$$

On en déduit que

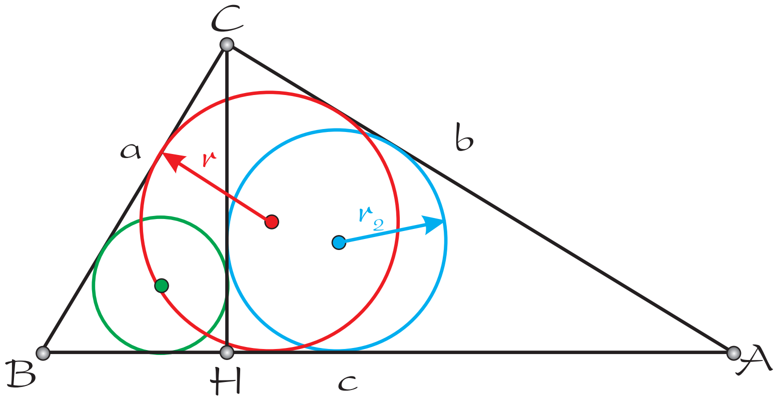
$$c = R - 2r_1 = r + 2r_2 \text{ et } b = r + 2r_1$$

Mais la relation de Pythagore donne $b^2 + c^2 = R^2$, soit $(r + 2r_1)^2 + (r + 2r_2)^2 - (r + 2(r_1 + r_2))^2 = r^2 - 8r_1r_2 = 0$.

2 Cercles inscrits dans un triangle rectangle



Les notations sont celles de la figure.



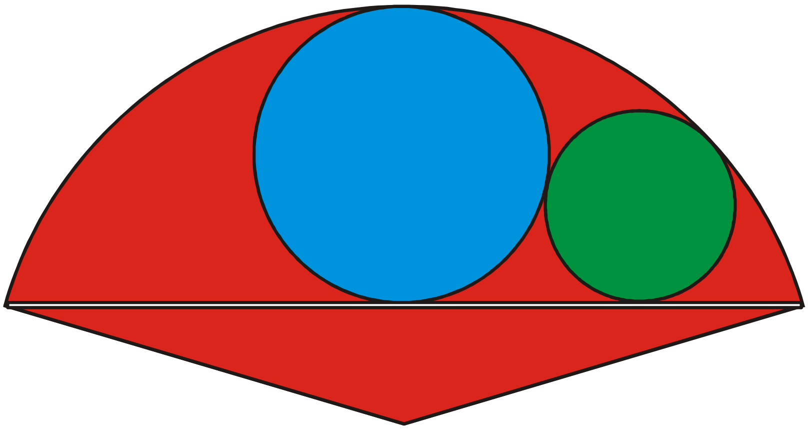
Les triangles CBA et HCA sont semblables. Le rapport de la similitude vaut $\dfrac{\mathsf{AC}}{\mathsf{AB}} = \dfrac{b}{c}$, on en déduit que

$$r_2 = \frac{b}{c} r \text{ et par symétrie des rôles } r_1 = \frac{a}{c} r$$

On a donc

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{b^2 + a^2}{c^2} r^2 = r^2 \text{ car } \mathsf{ABC} \text{ est rectangle en } \mathsf{C}$$

3 Deux cercles inscrits dans un arc.

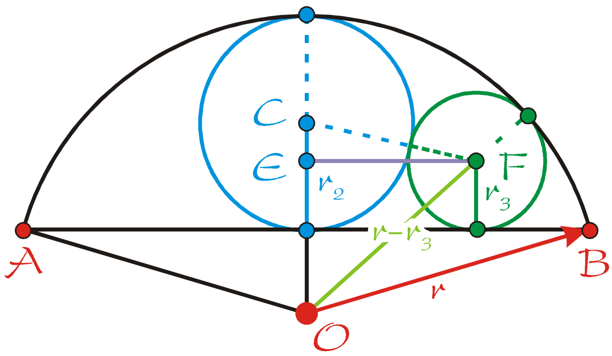


$$r_3 = \frac{r_2(r-r_2)}{r}$$

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r et $[A, B]$ une corde, on inscrit dans l'arc $\overset{\frown}{AB}$ un cercle $\mathcal{C}_2$ de rayon r_2 tangent à $\mathcal{C}$ et à la corde en son milieu. On construit alors un des deux cercles de rayon r_3 tangent à $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_2$ et à AB. On demande de prouver que

$$r_3 = \frac{r_2(r-r_2)}{r}$$

Les notations sont celles de la figure.



On sait que (il suffit d'écrire la relation de Pythagore dans le triangle ECF qui donne $EF^2 = (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2$)

$$EF^2 = 4r_2r_3$$

De plus

$$\begin{aligned} OF &= r - r_3 \\ EC &= r_2 - r_3 \text{ et } OE + CE = r - r_2 \Longrightarrow OE = r + r_3 - 2r_2 \end{aligned}$$

La relation de Pythagore dans le triangle OEF conduit à

$$(r + r_3 - 2r_2)^2 + 4r_2r_3 - (r - r_3)^2 = 0$$

soit

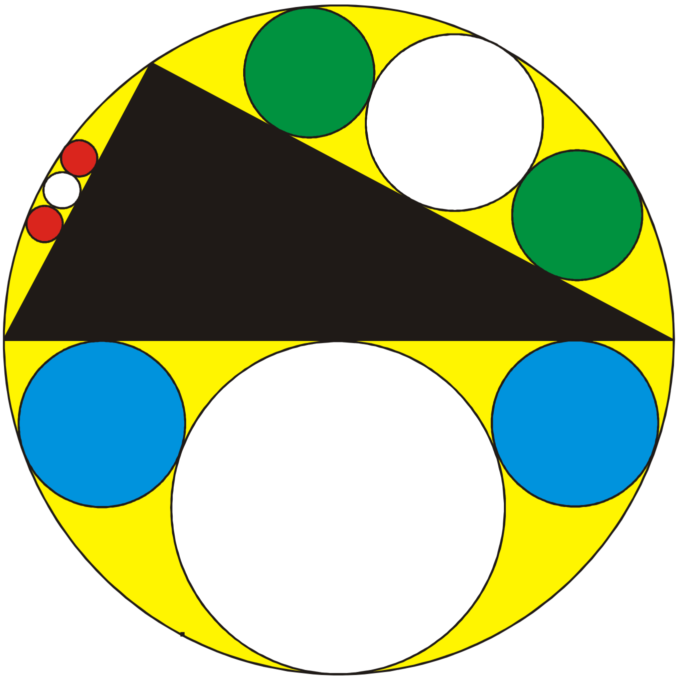
$$(r - r_3)^2 - (r + r_3 - 2r_2)^2 = 4(r_2 - r_3)(r - r_2) = 4r_2r_3$$

d'où

$$r_3 = \frac{r_2(r-r_2)}{r}$$

4 Un sangaku de la préfecture de Saitama

Ce sangaku dont la tablette n'a pas survécu, date de 1816.



$$r_3 = r_1 + r_2$$

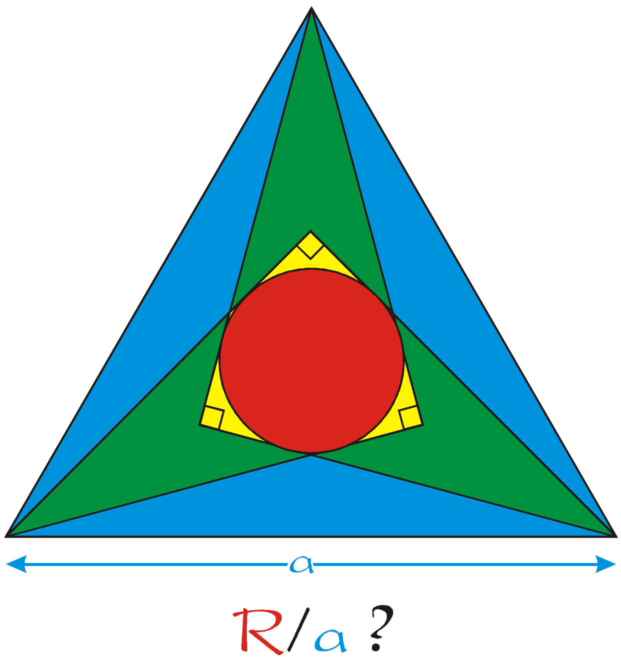
Etant donné un cercle et un triangle triangle rectangle inscrit dans ce dernier, on construit neuf cercles tangents intérieurement au cercle et aux côtés du triangle comme indiqué sur la figure. Si on note R le rayon du cercle jaune, r le rayon du cercle inscrit, non représenté, ρ_1, ρ_2 et ρ_3 les rayons des cercles blancs tangents respectivement aux cercles bleus, rouges et verts. On sait que

$$\begin{aligned}
2(\rho_1 + \rho_2) &= R - r \text{ et } 8\rho_1\rho_2 = r^2 \text{ (cf le premier sangaku)} \\
\rho_3 &= \frac{R}{2} \\
r_1 &= \frac{\rho_1(R-\rho_1)}{R} = \rho_1 - \frac{\rho_1^2}{R} \text{ et } r_2 = \rho_2 - \frac{\rho_2^2}{R} \\
r_3 &= \rho_3 - \frac{\rho_3^2}{R} = \frac{R}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi

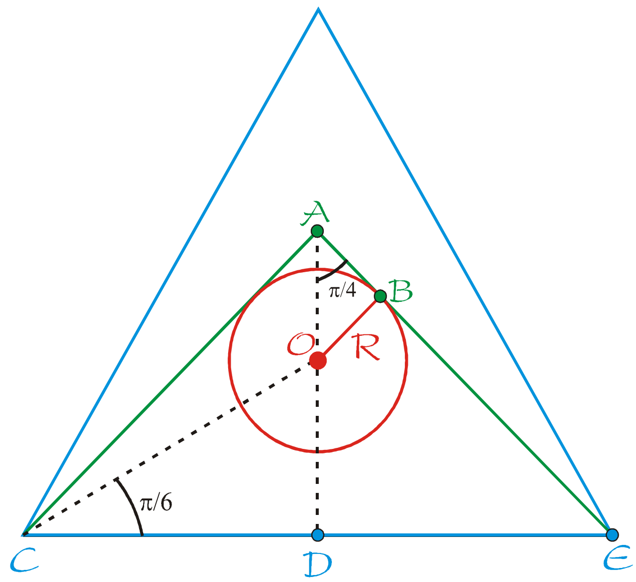
$$\begin{aligned}
r_1 + r_2 &= \rho_1 + \rho_2 - \frac{\rho_1^2}{R} - \frac{\rho_2^2}{R} \\
&= \rho_1 + \rho_2 - \frac{1}{R}\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 - 2\rho_1\rho_2\right) \\
&= \rho_1 + \rho_2 - \frac{1}{R}\left((\rho_1+\rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2\right) \\
&= \frac{R-r}{2} - \frac{1}{R}\left(\left(\frac{R-r}{2}\right)^2 - \frac{r^2}{4}\right) = \frac{R}{4} \\
&= r_3
\end{aligned}$$

5 Trois triangles rectangles dans un triangle équilatéral.



On considère un triangle équilatéral. Sur ses trois côtés, on construit intérieurement trois triangles rectangles isocèles et isométriques. Par intersection, ces triangles définissent un hexagone circonscriptible. On demande de calculer le rayon du cercle inscrit dans l'hexagone en fonction du côté du triangle.

Les notations sont celles de la figure.



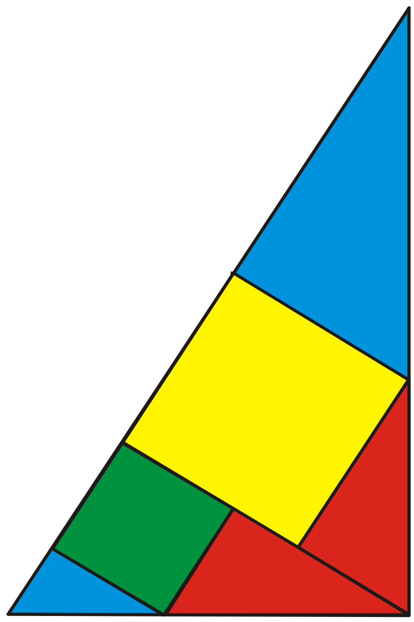
Dans le triangle ODC, on a $\mathsf{OD} = \frac{a}{2}\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ et puisque ACE est rectangle isocèle, $\mathsf{AD} = \mathsf{CD} = \frac{a}{2}$. On e déduit que

$$\mathsf{AO} = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}a = a\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

enfin $\mathsf{OB} = \mathsf{R} = \mathsf{AO}\sin\frac{\pi}{4}$, soit

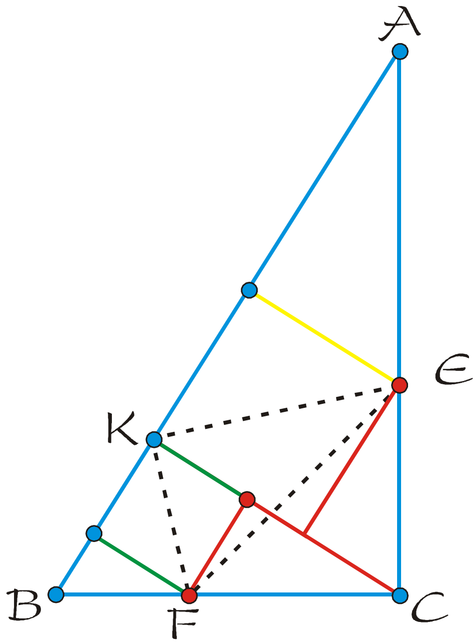
$$\mathsf{R} = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{512}a$$

6 Deux carrés dans un triangle rectangle.



Les triangles rouges
sont isométriques

Dans un triangle rectangle ABC, on inscrit deux carrés s'appuyant sur la hauteur issue du sommet C opposé à l'hypothénuse. Il s'agit de prouver que, avec les notations de la figure, les segments FC et EC ont même longueur, ce qui implique que les deux triangles rouges sont isométriques.



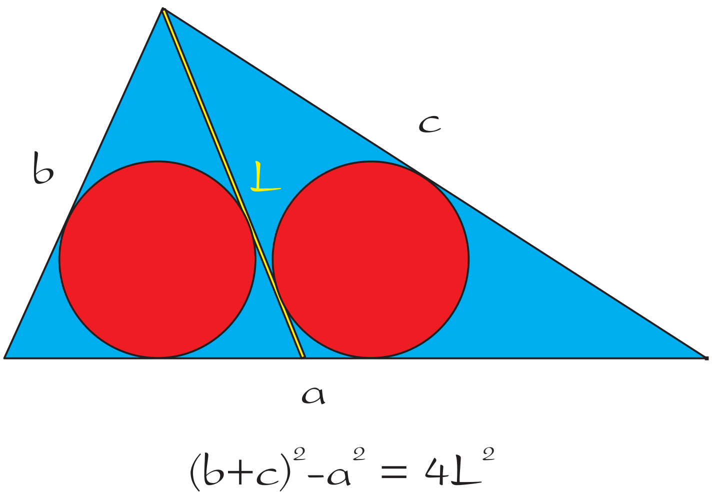
La présence des carrés permet d'affirmer que les angles $\widehat{\mathsf{FKC}}$ et $\widehat{\mathsf{CKE}}$ valent $\frac{\pi}{4}$, on en déduit que $\widehat{\mathsf{FKE}} = \frac{\pi}{2}$. De cette égalité on en déduit que K, et C sont situés sur le cercle de diamètre [E, F]. D'après le théorème de l'arc capable, le segment [F, C] est vu des points K et E sous le même angle, en particulier

$$\widehat{FKC} = \widehat{FEC} = \frac{\pi}{4}$$

Le triangle CEF est donc rectangle isocèle ainsi

$$FC = EC$$

7 Deux cercles égaux dans un triangle

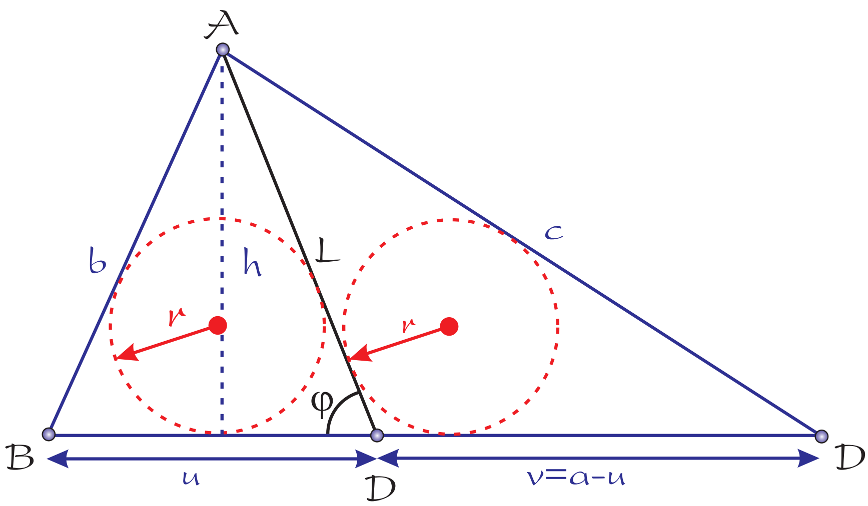


Le sangaku qui suit est mentionné sur une tablette datée de 1897 et localisée dans la préfecture de Chiba. Le même problème est mentionné dans un ouvrage daté de 1781 de Seiyo Sanpo. Etant donné un triangle ABC, on construit le point D du segment $[B, C]$ tel que les cercles inscrits à ABD et ADC aient même rayon. On désigne par L la longueur AD, et par a, b et c les longueurs des côtés opposés à B, C et A, il s'agit de prouver la relation

$$(b + c)^2 - a^2 = 4L^2$$

La tablette d'origine demande le calcul de L en fonction de a, b et c et forunit le résultat $L = \sqrt{p\,(p - a)}$ où $p = \dfrac{a + b + c}{2}$ est le demi-périmètre du triangle.

Les notations sont celles de la figure.



Le rayon des cercles inscrits aux triangles ABD et ACD étant le même, on a

$$2r = \frac{hu}{b+L+u} = \frac{hv}{c+L+v}$$

On obtient donc, après simplification par h, et passage à l'inverse

$$\frac{b+L+u}{u} = 1 + \frac{b+L}{u} = 1 + \frac{c+L}{v} = \frac{c+L+v}{v}$$

Compte tenu de $a = u + v$, on a

$$(c+L)\,u = (b+L)\,(a-u) \Longrightarrow u = \frac{a\,(c+L)}{(b+c+2L)}$$

et par symétrie des rôles

$$v = \frac{a\,(b+L)}{(b+c+2L)}$$

La formule d'Al kashi dans les triangles ABD et ACD s'écrit

$$\begin{aligned} L^2 + u^2 - 2Lu\cos\varphi &= b^2 \Longleftrightarrow b^2 - L^2 = u\,(u - 2L\cos\varphi) \\ L^2 + v^2 - 2Lv\cos(\pi - \varphi) &= c^2 \Longleftrightarrow c^2 - L^2 = v\,(v + 2L\cos\varphi) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} u &= \frac{a\,(c+L)}{(b+c+2L)} \Longrightarrow u\,(c-L) = \frac{a\left(c^2 - L^2\right)}{(b+c+2L)} = \frac{au\,(u - 2L\cos\varphi)}{(b+c+2L)} \Longrightarrow (c-L)\,(b+c+2L) = a\,(u - 2L\cos\varphi) \\ v &= \frac{a\,(b+L)}{(b+c+2L)} \Longrightarrow v\,(b-L) = \frac{av\,(v + 2L\cos\varphi)}{(b+c+2L)} \Longrightarrow (b-L)\,(b+c+2L) = a\,(v + 2L\cos\varphi) \end{aligned}$$

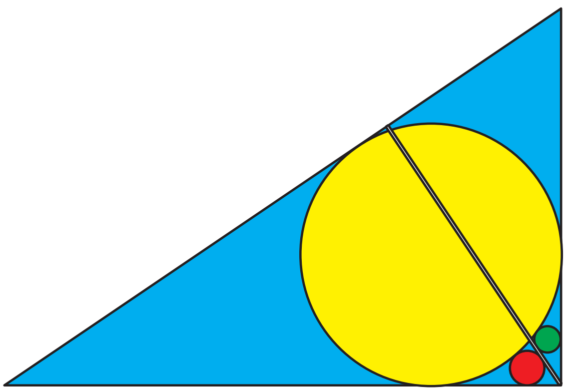
d'où

$$(b+c)^2 - 4L^2 = (c-L)\,(b+c+2L) + (b-L)\,(b+c+2L) = a\,(u - 2L\cos\varphi + v + 2L\cos\varphi) = a\,(u+v)$$

On conclut avec $a = u + v$, pour obtenir

$$(b+c)^2 - a^2 = 4L^2$$

8 Trois cercles dans un triangle rectangle : Un sangaku de la préfecture de Nagano.

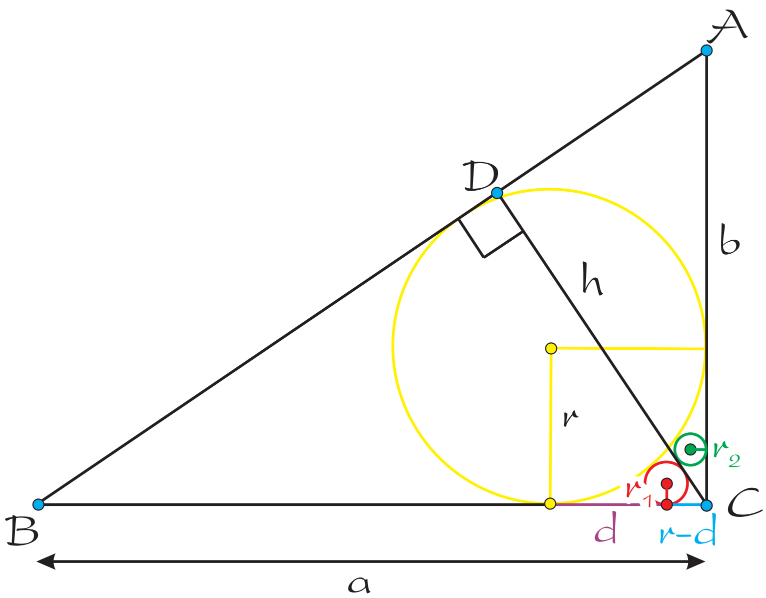


r_1 et r_2 ?

Ce sangaku est le dernier d'une série de quatre problèmes peints sur une tablette de 97×232 cm, exposée dans le sanctuaire shimizu, ville de Nagano.

Etant donné un triangle rectangle ABC, on note $\mathcal{C}$ son cercle inscrit et D le pied de la hauteur issue de C. Ce point détermine deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tangents à $\mathcal{C}$, à la hauteur CD et respectivement aux côtés CB et CA. On demande d'exprimer r_1 et r_2 en fonction du rayon r de $\mathcal{C}$ et des longueurs a et b respectivement. Les notations sont celles de la figure. En particulier, on note d la distance entre les points où les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ sont tangents avec le côté BC. On sait alors (cf le premier sangaku de [1]), que

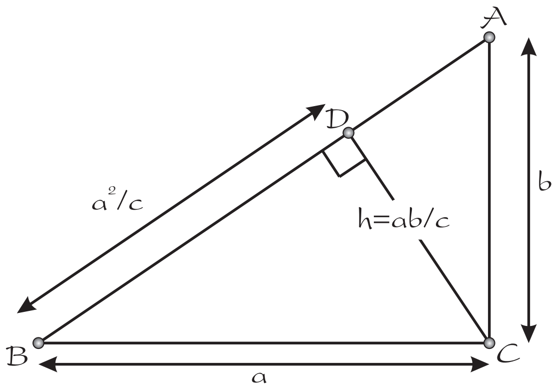
$$d = 2\sqrt{rr_1}$$



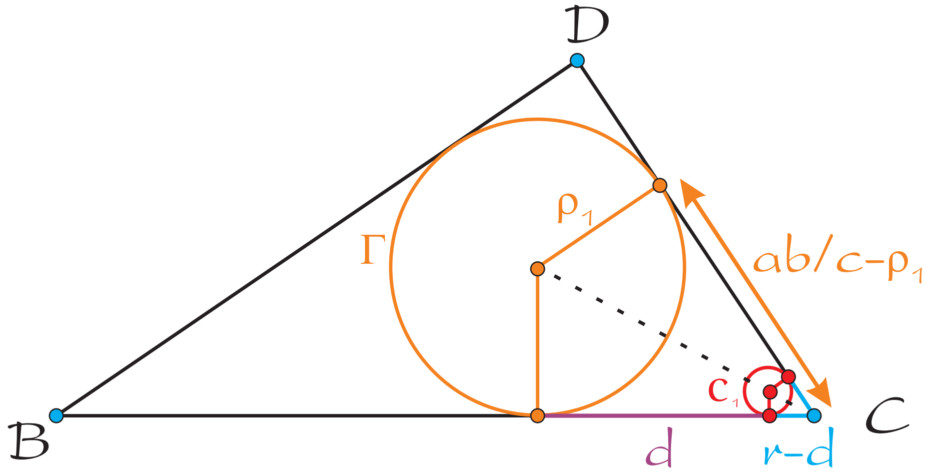
On procède par étapes. On commence par déterminer les longueurs des côtés du triangle CDB en fonctions de celles de ABC. Les deux triangles sont semblables, $ABC \backsim CBD$, si on note $h = CD$ la hauteur, on a alors

$$\begin{aligned}
\frac{CD}{AC} &= \frac{h}{b} = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{c} \Longrightarrow CD = h = b \times \frac{a}{c} \\
\frac{BD}{BC} &= \frac{CB}{AB} \Longrightarrow BD = a \times \frac{a}{c} \text{ et } BC = a = c \times \frac{a}{c}
\end{aligned}$$

ce que résume le dessin suivant.



Dans le traingle BCD, soit Γ le cercle inscrit de rayon ρ_1, le cercle $\mathcal{C}_1$ est l'image de Γ par l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{r_1}{\rho_1}$.



Le triangle BCD étant semblable à ABC, on a $\rho_1 = \dfrac{a}{c}r$, on en déduit que $\dfrac{a}{c}b - \rho_1 = \dfrac{a}{c}(b-r) = \dfrac{a}{c}\left(b - \dfrac{a+b-c}{2}\right) = \dfrac{a}{c}\left(\dfrac{b+c-a}{2}\right)$. Les cercles Γ et $\mathcal{C}_1$ étant homothétiques, on a

$$\frac{r-d}{\dfrac{ab}{c} - \rho_1} = \frac{r_1}{\rho_1} \iff \frac{r-d}{\dfrac{a}{c}(b-r)} = \frac{r_1}{\dfrac{a}{c}r} \implies r_1 = r\frac{r-d}{b-r} \implies (b-r)\,r_1 - r^2 + rd = 0$$

Avec $d = 2\sqrt{r}\sqrt{r_1}$, on en déduit que $\sqrt{r_1}$ est racine de l'équation du second degré

$$(b-r)\,X^2 + 2r\sqrt{r}X - r^2 = 0$$

dont la racine positive est (le produit des racines est $\dfrac{r^2}{b-r} < 0$)

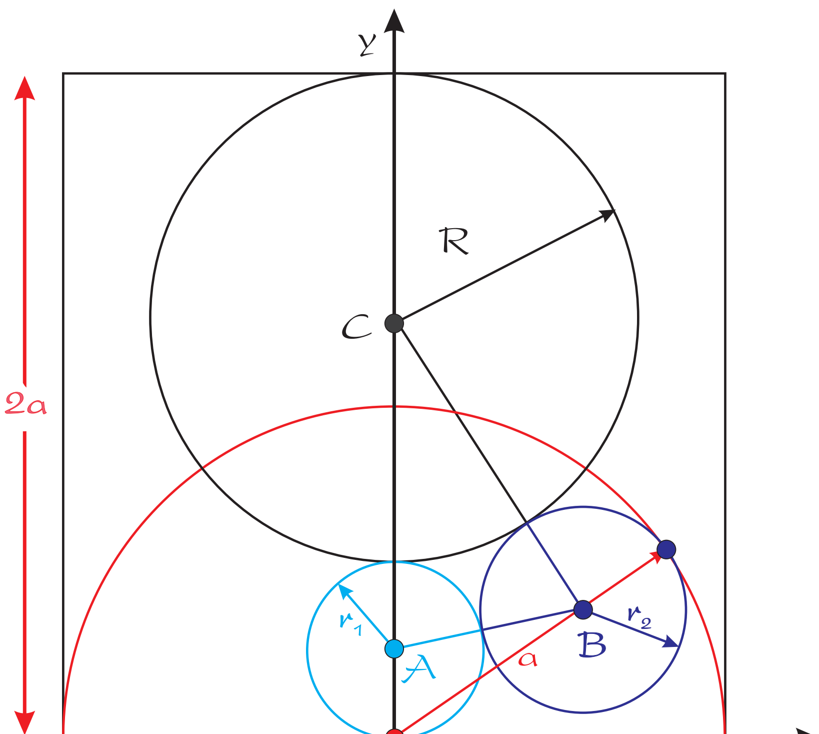
$$\frac{-r\sqrt{r} + r\sqrt{b}}{b-r} = r\frac{-\sqrt{r}+\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{r}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{r}\right)} = \frac{r}{\sqrt{b}+\sqrt{r}}$$

On a donc montré que

$$r_1 = \left(\frac{r}{\sqrt{b}+\sqrt{r}}\right)^2 \text{ et } r_2 = \left(\frac{r}{\sqrt{a}+\sqrt{r}}\right)^2$$

9 Variations autour d'un sangaku de la préfecture de Tokyo

Le sangaku précédent est exposé dans la ville de Tokyo, temple de Toenji, la tablette daté de 1869 mesure 180 $\times$ 90cm. Le quatrième problème peut être l'objet de variations autour du thème résumé dans la figure suivante.



La première question simple que l'on peut se poser est de déterminer la relation vérifiée par les trois rayons R, r_1 et r_2. Les notations sont celles de la figure. On se place dans le repère (O, x, y). Les coordonnées des points A, B et C sont alors

$A:(0,r_1)$, $B:(x,y)$ et $C:(0,2a-R)$. Les conditions de tangences entre les différents cercles s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
2r_1+2R &= 2a \\
x^2+(y-r_1)^2 &= (r_1+r_2)^2 && \text{Les cercles de rayons } r_2 \text{ et } r_1 \text{ sont tangents} && ((1)) \\
x^2+(y-2a+R)^2 &= (R+r_2)^2 && \text{Les cercles de rayons } r_2 \text{ et } R \text{ sont tangents} && ((2)) \\
x^2+y^2 &= (a-r_2)^2 && \text{Les cercles de rayons } r_2 \text{ et } a \text{ sont tangents} && ((3))
\end{aligned}$$

A l'aide des équations (1) et (3), puis (2) et (3), on obtient, par différence.

$$\begin{aligned}
y^2-(y-r_1)^2 &= r_1(2y-r_1)=(a-r_2)^2-(r_1+r_2)^2 \\
&= (R-2r_2)(R+2r_1)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
y^2-(y-2a+R)^2 &= (R+2r_1)(2y-R-2r_1)=(a-r_2)^2-(R+r_2)^2 \\
&= (r_1-2r_2)(2R+r_1)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{(R-2r_2)(R+2r_1)}{r_1}+r_1=\frac{(r_1-2r_2)(2R+r_1)}{R+2r_1}+(R+2r_1) \qquad ((E))$$

9.1 Le problème de Tokyo

Dans ce sangaku, les rayons r_1 et r_2 sont égaux à r, il s'agit de trouver la ralation vérifiée par le rapport $\rho=\frac{R}{r}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{(R-2r_2)(R+2r_1)}{r_1}+r_1 &= \frac{R^2-3r^2}{r} \\
\frac{(r_1-2r_2)(2R+r_1)}{R+2r_1}+(R+2r_1) &= \frac{R^2+2Rr+3r^2}{R+2r}
\end{aligned}$$

et l'égalité devient

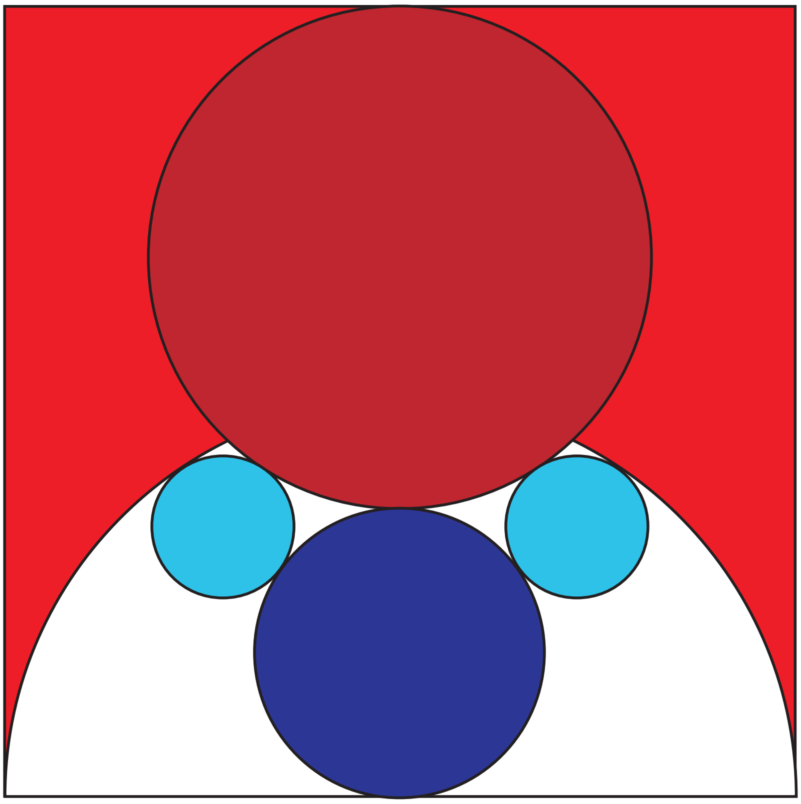
$$\frac{R^2-3r^2}{r}=\frac{R^2+2Rr+3r^2}{R+2r} \Longleftrightarrow R^3+R^2r-5Rr^2-9r^3=0$$

Le rapport ρ est donc solution de l'équation du troisième degré

$$\rho^3+\rho^2-5\rho-9=0$$

9.2 Première variation.

Je propose donc la première variation suivante. Je ne sais pas si ce problème a déjà été posé sur un sangaku.



$$r_1/r_2 = 2 \qquad R/r_1 = ?$$

On a donc $r_1 = 2r_2$, l'égalité (E) devient

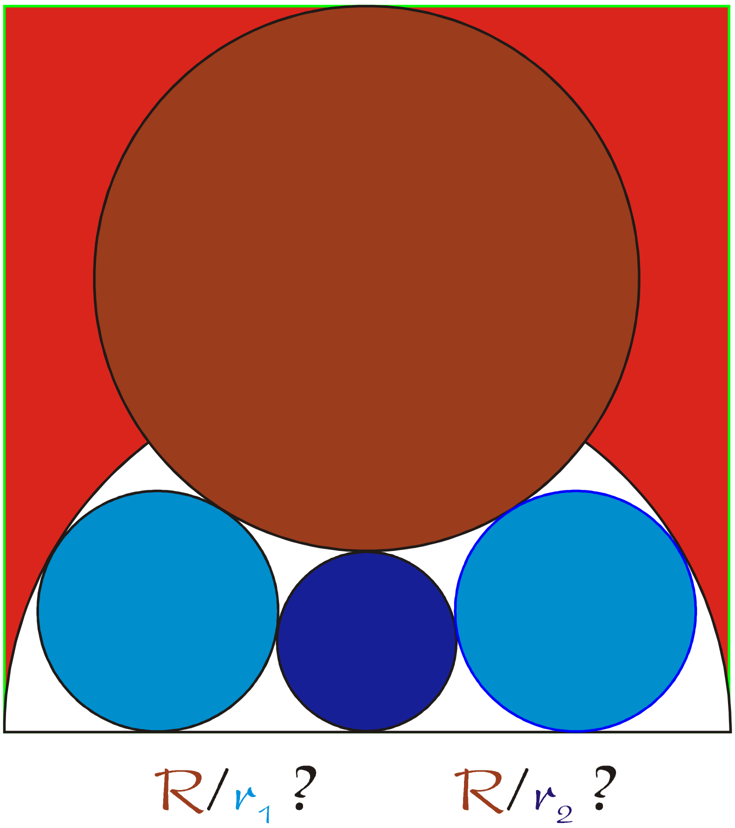
$$\begin{aligned} \frac{(R-2r_1)(R+4r_1)}{2r_1} + 2r_1 &= R - 2r_1 + \frac{R^2}{2r_1} \\ \frac{(2r_1-2r_1)(2R+2r_1)}{R+4r_1} + (R+4r_1) &= R+4r_1 \end{aligned}$$

soit

$$R - 2r_1 + \frac{R^2}{2r_1} = R + 4r_1 \Longleftrightarrow R^2 - 12r_1^2 = 0 \Longleftrightarrow \frac{R}{r_1} = 2\sqrt{3}$$

9.3 Une seconde variation

La variation suivante est également personnelle.



Dans ce cas, les coordonnées du point B sont immédiatement, par application du premier sangaku de [1].

$$B : (2\sqrt{r_1 r_2}, r_2)$$

Les équations (2) et (3) deviennent alors

$$\begin{aligned} 4r_1 r_2 + (r_2 - 2r_1 - R)^2 - (R + r_2)^2 &= 0 && ((2)) \\ 4r_1 r_2 + r_2^2 - (R + r_1 - r_2)^2 &= 0 && ((3)) \end{aligned}$$

La première, après développement donne $4r_1^2 + 4Rr_1 - 4Rr_2 = 0$, soit

$$r_2 = \frac{r_1 (r_1 + R)}{R}$$

La seconde se factorise alors en

$$\begin{aligned} r_2 (4r_1 + r_2) - (R + r_1 - r_2)^2 &= \frac{r_1 (r_1 + R)}{R} \left(4r_1 + \frac{r_1 (r_1 + R)}{R}\right) - \left(R + r_1 - \frac{r_1 (r_1 + R)}{R}\right)^2 \\ &= (r_1 + R) \times \frac{r_1^2}{R^2} (5R + r_1) - \frac{(r_1 + R)^2}{R^2} \times (R - r_1)^2 \\ &= \frac{(r_1 + R)}{R^2} \times \left(r_1^2 (5R + r_1) - (R - r_1)^2 (r_1 + R)\right) \\ &= \frac{(r_1 + R)}{R^2} \times \left(6Rr_1^2 + R^2 r_1 - R^3\right) = \frac{(r_1 + R)}{R} \times \left(6r_1^2 + Rr_1 - R^2\right) \\ &= \frac{(r_1 + R)}{R} (2r_1 + R)(3r_1 - R) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\frac{R}{r_1} = 3 \text{ et } r_2 = \frac{\frac{R}{3}\left(\frac{R}{3} + R\right)}{R} = \frac{4}{9}R \Longrightarrow \frac{R}{r_2} = \frac{9}{4}$$

Références

[1] Géry Huvent. « Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises ». (Dunod, Novembre 2008).