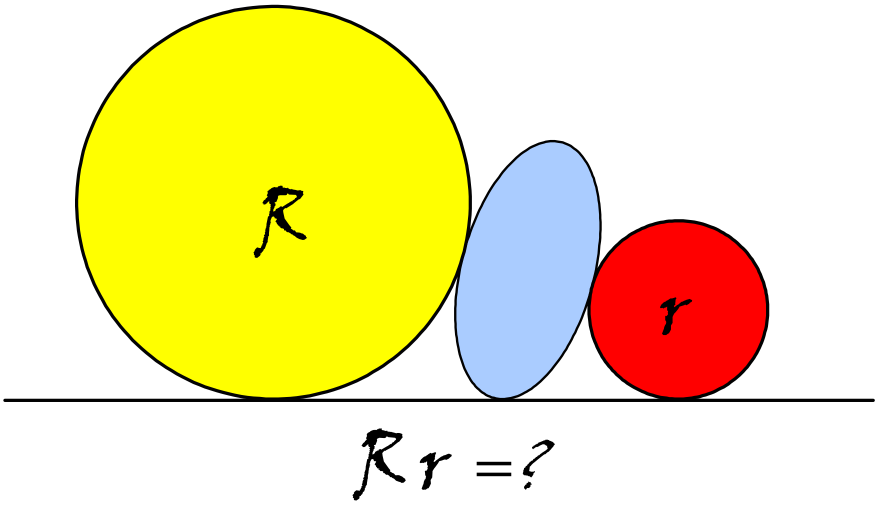
Une ellipse et deux cercles tangents.

Géry Huvent

8 juillet 2019



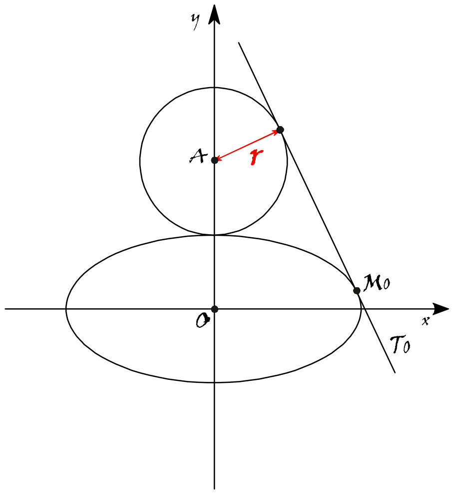
Les deux cercles rouges et jaunes sont tangents à l'ellipse aux sommets secondaires et ont une tangente commune avec cette dernière. On demande de donner la valeur du produit des deux rayons des cercles en fonction des éléments caractéristiques de l'ellipse.

On note $2a$ la longueur du grand axe de l'ellipse et $2b$ celle du petit axe. On se place dans le repère centré au centre de l'ellipse $\mathcal{E}$ et dont les axes sont portés par ceux de l'ellipse comme indiqué par le schéma. L'équation de l'ellipse est alors

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si M_0 de coordonnées (x_0, y_0) est un point de l'ellipse, la tangente T_0 en M_0 a pour équation

$$T_0 : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$



Le centre A du cercle tangent $\mathcal{C}$ à $\mathcal{E}$ a pour coordonnées $(0, b+r)$, la tangente T_0 est également tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si la distance, noté $d(A, T_0)$, de A à T_0 est égale au rayon, à savoir égal à r. Cette distance, on en déduit que

$$d(A,T_0)^2 = \frac{\left(\frac{(b+r)\times y_0}{b^2} - 1\right)^2}{\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)} = r^2$$

Ce qui s'écrit

$$\left((b+r)\times y_0 - b^2\right)^2 = r^2\left(\frac{b^4}{a^2}\frac{x_0^2}{a^2} + y_0^2\right)$$

Puisque M_0 est sur $\mathcal{E}$, on a également $\frac{x_0^2}{a^2} = 1 - \frac{y_0^2}{b^2}$ ce qui donne

$$\left((b+r)\times y_0 - b^2\right)^2 - r^2\left(\frac{b^4}{a^2} + \frac{a^2-b^2}{a^2}y_0^2\right) = 0$$

On obtient une équation du second degré en y_0 dont une solution évidente est $y_0 = b$, qui correspond à la tangente commune à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ passant par le sommet secondaire de l'ellipse. L'autre solution s'obtient en considérant le produit des racines et vaut ainsi

$$y_0 = \frac{1}{b}\frac{\left(-b^2\right)^2 - r^2\left(\frac{b^4}{a^2}\right)}{(b+r)^2 - r^2\frac{a^2-b^2}{a^2}} = b^3\frac{a^2-r^2}{a^2(b+r)^2 - r^2(a^2-b^2)} = b^2\frac{a^2-r^2}{a^2b+2a^2r+br^2}$$

On procède de même avec le cercle de rayon R qui est centré en $B : (0, -b-R)$, ce qui donne

$$d(B,T_0)^2 = \frac{\left(\frac{(-b-R)\times y_0}{b^2} - 1\right)^2}{\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)} = R^2$$

On obtient

$$\left((b+R)\times y_0 + b^2\right)^2 - R^2\left(\frac{b^4}{a^2} + \frac{a^2-b^2}{a^2}y_0^2\right) = 0$$

dont une solution est $y_0 = -b$, l'autre est alors

$$y_0 = -b^2\frac{a^2-R^2}{a^2b+2a^2R+bR^2}$$

On en déduit que

$$b^2\frac{a^2-r^2}{a^2b+2a^2r+br^2}=-b^2\frac{a^2-R^2}{a^2b+2a^2R+bR^2} \qquad (*)$$

on pose alors pour simplifier les calculs $t=\dfrac{r}{a}$ et $u=\dfrac{R}{a}$, ainsi

$$\frac{a^2-r^2}{a^2b+2a^2r+br^2}=\frac{1-t^2}{b+2at+bt^2}$$

et $(*)$ devient

$$\frac{1-t^2}{b+2at+bt^2}=-\frac{1-u^2}{b+2au+bu^2}$$

ce qui équivaut à

$$b\left(\left(1-t^2\right)\left(1+u^2\right)+\left(1-u^2\right)\left(1+t^2\right)\right)=-2a\left(u\left(1-t^2\right)+t\left(1-u^2\right)\right)$$

d'où

$$2b\left(tu+1\right)\left(1-tu\right)=-2a\left(t+u\right)\left(1-tu\right)$$

On en déduit que $tu=1$ (car a,b,t et u sont positifs), d'où

$$\boxed{\text{rR=a}^2}$$