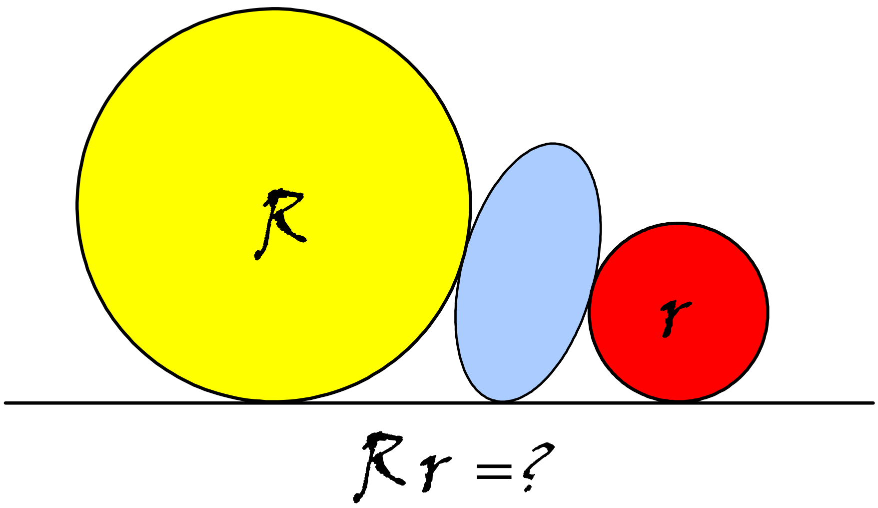
Une ellipse et deux cercles tangents.

(solution de @delireis_1453 postée sur Twitter le 01/11/19)

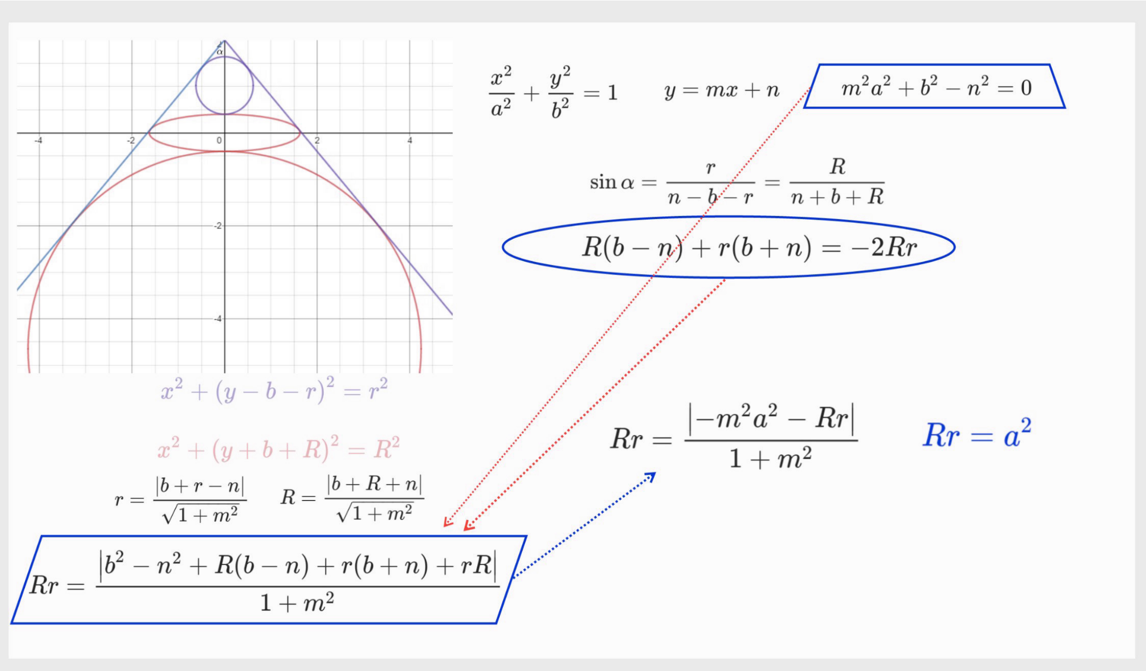
Géry Huvent

1er novembre 2019



Les deux cercles rouges et jaunes sont tangents à l'ellipse aux sommets secondaires et ont une tangente commune avec cette dernière. On demande de donner la valeur du produit des deux rayons des cercles en fonction des éléments caractéristiques de l'ellipse.

Voici la solution proposée par fatih sağlam (@delireis_1453) qui est plus synthétique.



Détaillons la preuve : On note $2a$ la longueur du grand axe de l'ellipse et $2b$ celle du petit axe. On se place dans le repère centré au centre de l'ellipse $\mathcal{E}$ et dont les axes sont portés par ceux de l'ellipse comme indiqué par le schéma. L'équation de l'ellipse est alors

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Les centres des deux cercles ont respectivement pour coordonnées $(0, b+r)$ et $(0, -b-R)$.
On considère une droite $\mathcal{D}$ non parallèle aux axes d'équation $y = mx+n$. Cette droite tangente à l'ellipse lorsque le système

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=mx+n \end{cases}$$

admet une racine double. On remplace $y = mx+n$ dans $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ pour obtenir $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}-1=x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)+\frac{2mn}{b^2}x+\frac{n^2}{b^2}-1=0$. Le discriminant réduit vaut

$$\left(\frac{mn}{b^2}\right)^2-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\frac{n^2}{b^2}-1=\frac{a^2m^2+b^2-n^2}{a^2b^2}$$

Ce qui donne la condition de tangence

$$b^2-n^2=-a^2m^2$$

Cette droite est également tangente aux deux cercles si les distances des cdeux centres sont r et R. Ceci se traduit par

$$r=\frac{|b+r-n|}{\sqrt{1+m^2}} \text{ et } R=\frac{|b+R+n|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Rr &= \frac{|b+r-n|}{\sqrt{1+m^2}}\times\frac{|b+R+n|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{|(b+r-n)(b+R+n)|}{1+m^2} \\ &= \frac{\left|b^2-n^2+R(b-n)+r(b+n)+Rr\right|}{1+m^2} \end{aligned}$$

Le calcul du sinus de l'angle, noté α, entre $\mathcal{D}$ et l'axe Oy donne

$$\sin\alpha = \frac{r}{n-b-r} = \frac{R}{n+b+R}$$

d"où

$$r\left(n+b+R\right) = R\left(n-b-r\right) \Longleftrightarrow R\left(b-n\right) + r\left(b+n\right) = -2rR$$

On combine les trois égalités

$$\begin{aligned} Rr &= \frac{\left|b^2 - n^2 + R\left(b-n\right) + r\left(b+n\right) + Rr\right|}{1+m^2} \\ R\left(b-n\right) + r\left(b+n\right) &= -2rR \\ b^2 - n^2 &= -a^2 m^2 \end{aligned}$$

Pour avoir

$$Rr = \frac{\left|-a^2 m^2 - 2rR + Rr\right|}{1+m^2} = \frac{a^2 m^2 + Rr}{1+m^2}$$

ce qui donne (avec $m \neq 0$)

$$Rr = a^2$$

Reste le cas où la tangente est parallèle à Oy (le cas où elle est parallèle à Ox est impossible) qui est immédiat.