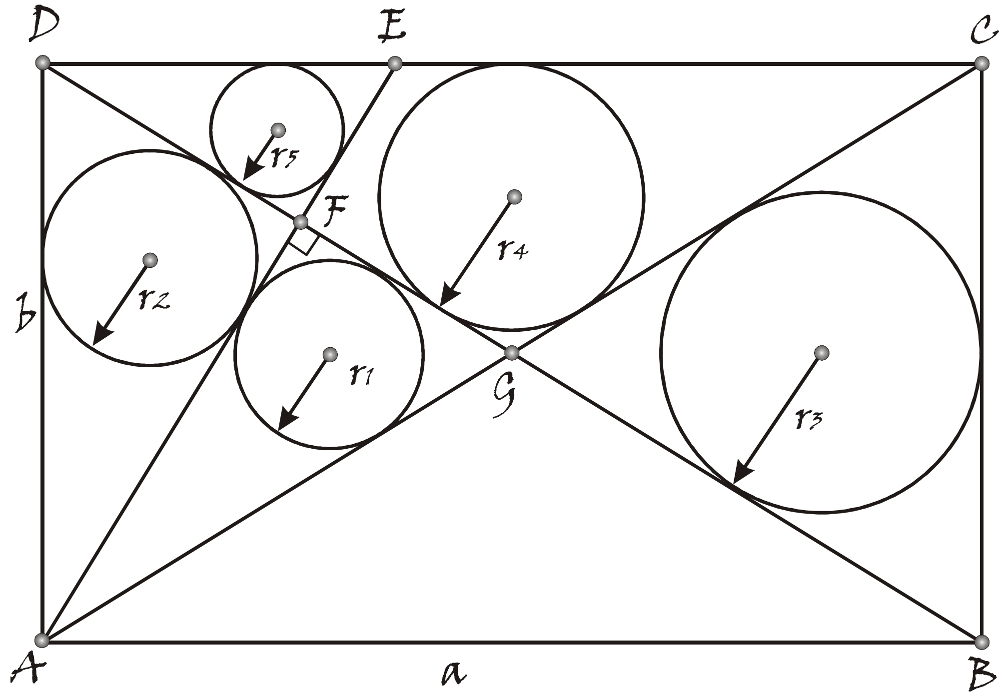
Une configuration de sangaku

Géry Huvent

9 mars 2015

1 Etude d'une configuration

On considère la figure suivante :



où $(ABCD)$ est un rectangle dont la longueur des côtés est $a \geq b$ et où (AE) et (BD) sont perpendiculaires. On note c la diagonale du rectangle, ainsi $c^2 = a^2 + b^2$.

1.1 Calculs des rayons r_1 et r_2

Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu, ainsi $AG = \dfrac{c}{2}$. Puisque (AF) est la hauteur du triangle (ABC) rectangle en A, on a $AF = \dfrac{ab}{c}$. On peut facilement établir ce résultat en remarquant que (ABD) et (FBA) sont semblables, ce que l'on note $(ABC) \underset{\triangleleft}{\sim} (FBA)$. Ainsi $\dfrac{AF}{BA} = \dfrac{AD}{BD} \Longleftrightarrow AF = \dfrac{ab}{c}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} FG^2 &= AG^2 - AF^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{a^2b^2}{c^2} \\ &= \frac{\left(a^2+b^2\right)^2 - 4a^2b^2}{4c^2} = \left(\frac{a^2-b^2}{2c}\right)^2 \quad \text{car } c^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

d'où

$$FG = \frac{a^2 - b^2}{2c}$$

et ainsi

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{a^2 - b^2}{2c} - \frac{c}{2}\right) = \frac{c^2 + b^2 - a^2 - 2ab}{4c} = \frac{b\,(a-b)}{2c}$$

Puis $DF = DG - FG = \frac{c}{2} - \frac{a^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2}{c}$ et ainsi

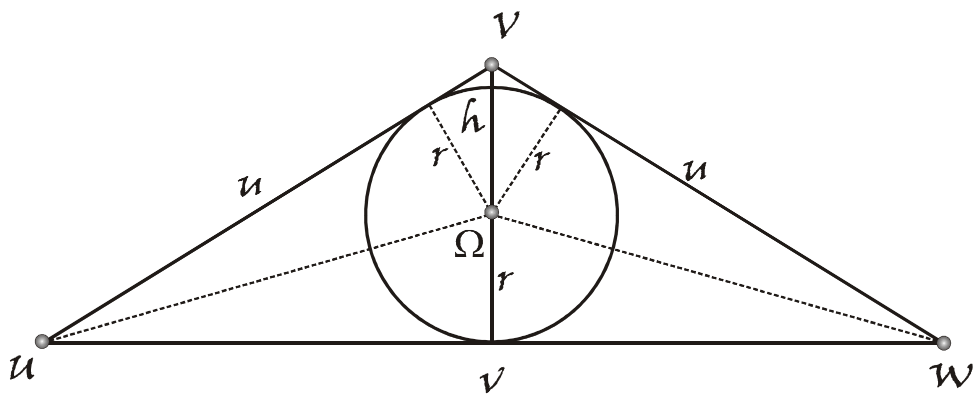
$$r_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{c} + \frac{ab}{c} - b\right) = \frac{b\,(a+b-c)}{2c}$$

1.2 Calculs de r_3 et r_4

Le calcul du rayon d'un triangle isocèle (UVW) est simple. Dans la figure suivante, l'aire du triangle vaut $\mathcal{A} = \frac{hv}{2}$ où h est la hauteur issue de V. Mais, en découpant le triangle en trois triangles $(U\Omega W)$, $(U\Omega V)$ et $(V\Omega W)$, on a

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,(2ru + rv)$$

d'où $r = \frac{2hv}{2u + v}$.



Les triangles (BCG) et (CDG) sont isocèles de hauteur respective $\frac{a}{2}$ et $\frac{b}{2}$, d'où

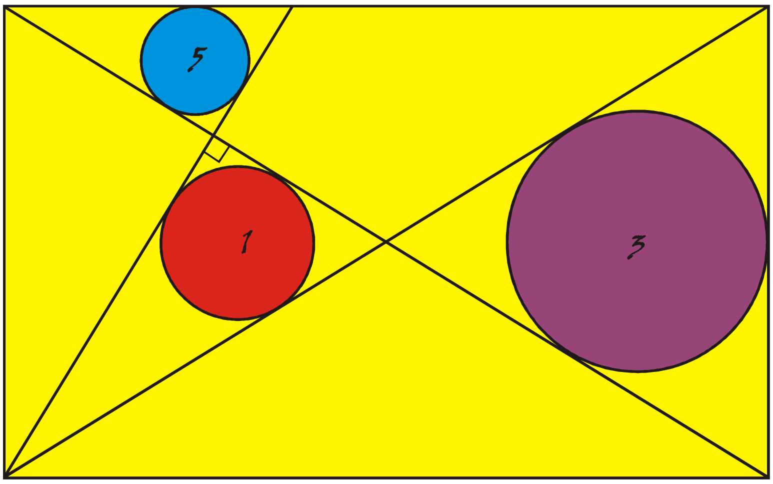
$$r_3 = \frac{ab}{2\,(b+c)} \text{ et } r_4 = \frac{ab}{2\,(a+c)}$$

1.3 Calcul de r_5

On a $(DFE) \underset{\triangleleft}{\sim} (AFD)$ ainsi $\frac{r_5}{r_2} = \frac{DF}{AF} = \frac{b}{a}$ d'où

$$r_5 = \frac{b}{a} r_2 = \frac{b^2\,(a+b-c)}{2ac}$$

1.4 Un premier résultat

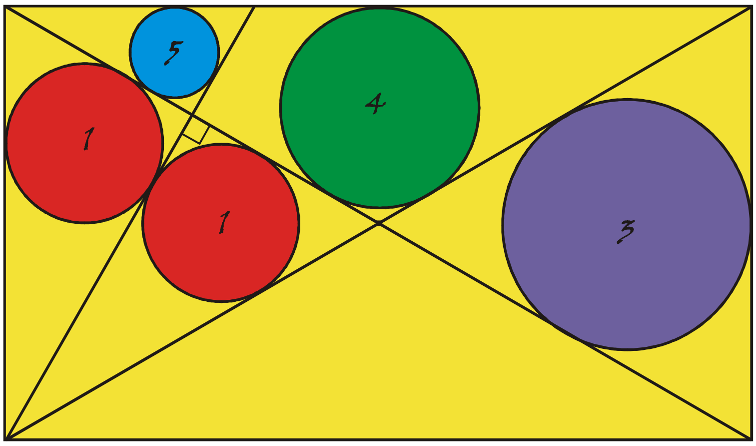


$r_1 + r_5 = r_3$

Un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} r_1 + r_5 - r_3 &= \frac{b\,(a-b)}{2c} + \frac{b^2\,(a+b-c)}{2ac} - \frac{ab}{2\,(b+c)} \\ &= \frac{\left(a^2+b^2-c^2\right) b^2}{2ac\,(b+c)} = 0 \end{aligned}$$

2 Un premier sangaku



$1/r_5 + 1/r_3 = 3/r_4$

Dans ce sangaku $r_1 = r_2 \iff c = 2b \iff c^2 - 4b^2 = a^2 - 3b^2 = 0$, cette configuration est donc possible si et seulement si $a = \sqrt{3}b$. Dans ce cas, on a $c = 2b$ et

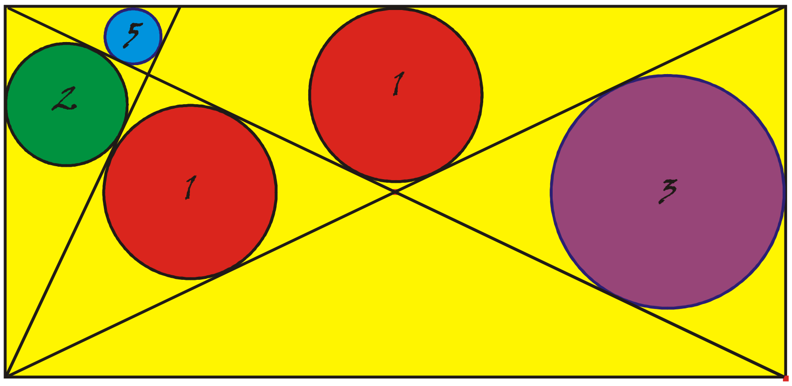
$$r_1 = \frac{b\left(\sqrt{3}b - b\right)}{4b} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}b,\ r_5 = \frac{b}{a}r_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{3}b \text{ et } r_3 = \frac{ab}{2\,(b+c)} = \frac{\sqrt{3}}{6}b$$

Puis

$$r_4 = \frac{ab}{2\,(a+c)} = \frac{\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}+2\right)}b$$

ainsi $\dfrac{1}{r_5}+\dfrac{1}{r_3}=\dfrac{3}{r_4}$ se vérifie facilement.

3 Un second sangaku



$r_3 r_5 = r_2 (r_3 - r_2)$

Dans ce cas $r_1 = r_4$, ce qui donne

$$\frac{b(a-b)}{2c}=\frac{ab}{2(a+c)} \iff (a-b)(a+c)-ca=0 \iff bc=a(a-b)$$

On a alors

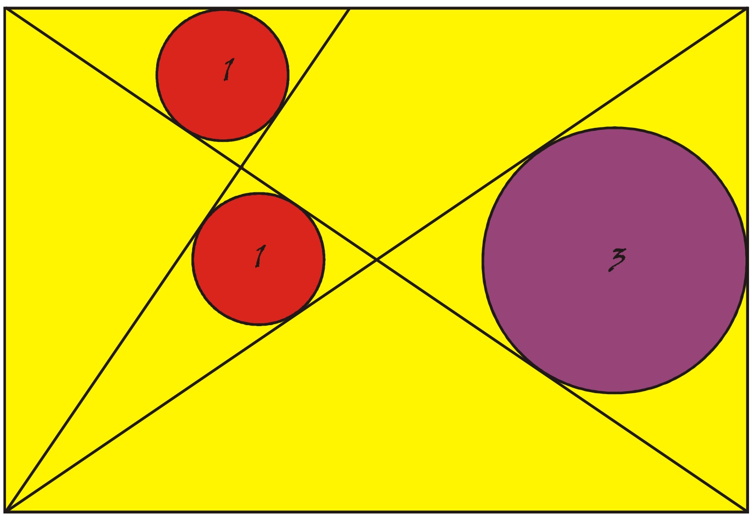
$$\begin{aligned}
r_3 r_5 &= \frac{ab}{2(b+c)}\times\frac{b}{a}r_2=\frac{b^2}{2(b+c)}r_2\\
r_3-r_2 &= \frac{ab}{2(b+c)}-\frac{b(a+b-c)}{2c}=\frac{b}{2(b+c)c}\left(c^2-b^2-ab\right)=\frac{ab(a-b)}{2(b+c)c}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$r_3 r_5 = r_2(r_3-r_2) \iff bc=a(a-b)$$

ce qui est bien équivalent à $r_1 = r_4$.

3.1 Un troisième sangaku



$r_3 = 2\, r_1$

Dans cas, $r_1 = r_5$ ce qui donne

$$\frac{b\,(a-b)}{2c} = \frac{b^2\,(a+b-c)}{2ac} \Longleftrightarrow a\,(a-b) = b\,(a+b-c)$$

ce qui donne

$$bc = 2ab - a^2 + b^2$$

Si on pose $a = xb$, alors

$$c = \left(-x^2 + 2x + 1\right) b$$

On élève au carré pour avoir,

$$c^2 = a^2 + b^2 = \left(1 + x^2\right) b^2 = \left(-x^2 + 2x + 1\right)^2 b^2$$

Ainsi x est racine de

$$\left(-x^2 + 2x + 1\right)^2 - \left(1 + x^2\right) = x\left(x^3 - 4x^2 + x + 4\right) = 0$$

Enfin

$$r_3 = 2r_1 \Longleftrightarrow \frac{ab}{2\,(b+c)} = \frac{b\,(a-b)}{c} \Longleftrightarrow ac = 2\,(a-b)\,(b+c)$$

soit

$$\begin{aligned} r_3 &= 2r_1 \Longleftrightarrow c = 2b\frac{a-b}{2b-a} \\ &\Longleftrightarrow c = 2b\frac{x-1}{2-x} \end{aligned}$$

En particulier, on a $a < 2b$. Puisqu'il s'agit de nombre positif, on obtient

$$c^2 = \left(1+x^2\right) b^2 = 4b^2 \left(\frac{x-1}{2-x}\right)^2 \Longleftrightarrow \left(1+x^2\right)(2-x)^2 - 4\,(x-1)^2 = 0$$

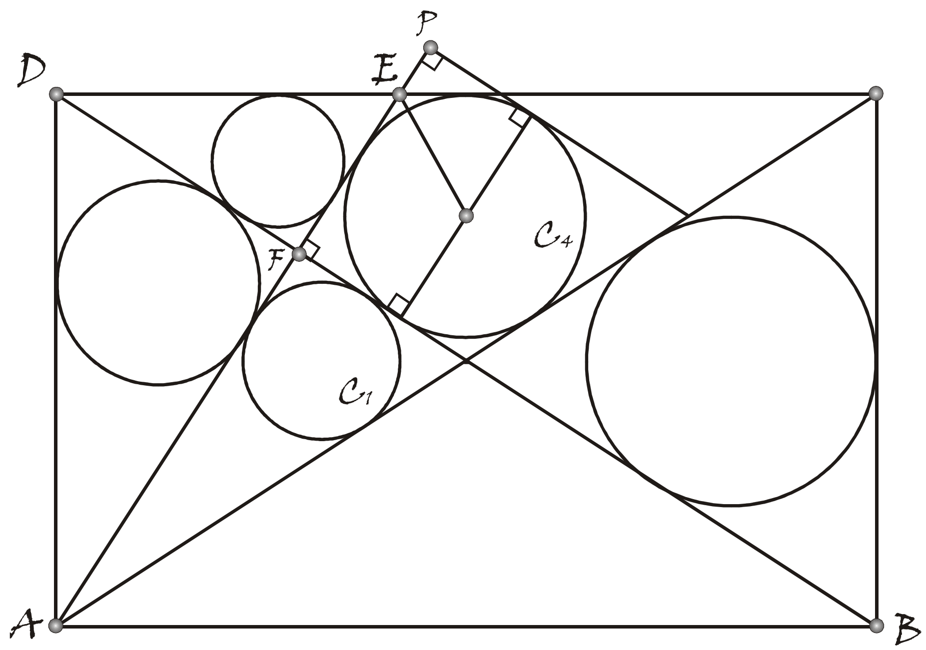
Mais, en développant

$$\left(1+x^2\right)(2-x)^2 - 4\,(x-1)^2 = x\left(x^3 - 4x^2 + x + 4\right)$$

Ce qui prouve le résultat.

3.2 Un dernier sangaku

On se place dans la configuration suivante où la droite (AE) est tangente au cercle $\mathcal{C}_4$.



On introduit le point P intersection de la tangente à $\mathcal{C}_4$ parallèle à BD et de AE. On a alors $FP = 2r_4$. Les deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_4$ sont homothétiques ainsi

$$\frac{AP}{AF} = \frac{AF + FP}{AF} = 1 + \frac{2r_4}{AF} = \frac{r_4}{r_1}$$

Or on a montré que

$$AF = \frac{ab}{c},\ r_1 = \frac{b\left(a-b\right)}{2c} \text{ et } r_4 = \frac{ab}{2\left(a+c\right)}$$

Ainsi

$$1 + \frac{2r_4}{AF} - \frac{r_4}{r_1} = 1 + \frac{c}{a+c} - \frac{ac}{\left(a+c\right)\left(a-b\right)} = 1 - \frac{cb}{\left(a+c\right)\left(a-b\right)} = 0$$

ce qui donne

$$c = \frac{a\left(a-b\right)}{2b-a}$$

On a alors

$$c^2 - \left(a^2+b^2\right) = \frac{a^2\left(a-b\right)^2}{\left(2b-a\right)^2} - \left(a^2+b^2\right) = \frac{2b\left(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - 2b^3\right)}{\left(2b-a\right)^2} = 0$$

On en déduit que

$$a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - 2b^3 = 0$$

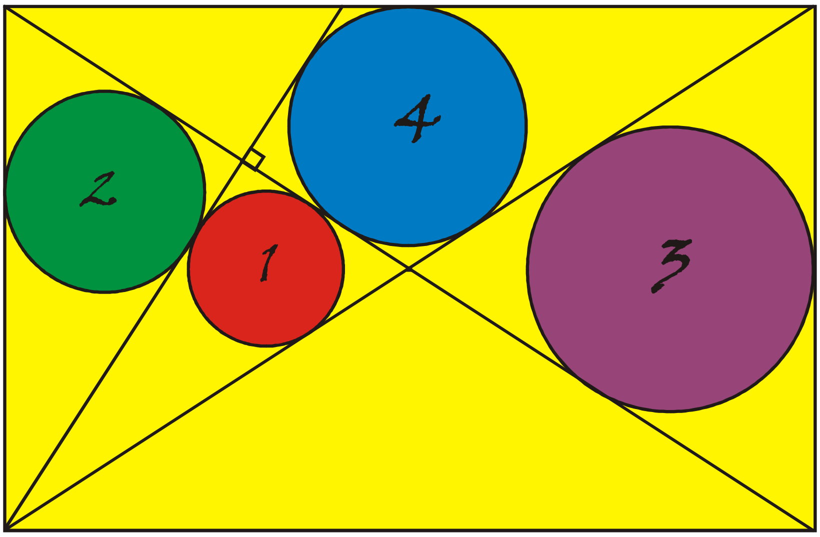
Mais $a\left(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - 2b^3\right) + b^4 = \left(a^2+b^2\right)\left(a-b\right)^2$, ce qui donne une condition simple

$$c^2\left(a-b\right)^2 = b^4 \Longleftrightarrow c = \frac{b^2}{a-b}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{b\left(a-b\right)}{2c} = \frac{\left(a-b\right)^2}{2b} \\
r_2 &= \frac{b\left(a+b-c\right)}{2c} = \frac{b\left(\left(a+b\right)^2 - c^2\right)}{2c\left(a+b+c\right)} = \frac{ab^2}{c\left(a+b+c\right)} = \frac{ab^2}{\frac{b^2}{a-b}\left(a+b+\frac{b^2}{a-b}\right)} = \frac{\left(a-b\right)^2}{a} \\
r_3 &= \frac{ab}{2\left(b+c\right)} = \frac{ab}{2\left(b+\frac{b^2}{a-b}\right)} = \frac{a-b}{2} \\
r_4 &= \frac{ab}{2\left(a+c\right)} = \frac{ab}{2\left(a+\frac{a\left(a-b\right)}{2b-a}\right)} = b - \frac{a}{2} \\
r_5 &= \frac{b}{a}r_2 = \frac{b\left(a-b\right)^2}{a^2}
\end{aligned}$$

On peut alors prouver que



$$1/r_1 + 1/r_3 = 2/r_2$$
$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4$$

Pour la première relation, il suffit de vérifier que $\dfrac{2b}{(a-b)^2} + \dfrac{2}{a-b} = \dfrac{2a}{(a-b)^2}$, ce qui est immédiat.

Pour la seconde relation, on a

$$\begin{aligned}
r_1 + r_3 &= \frac{(a-b)^2}{2b} + \frac{a-b}{2} = \frac{a(a-b)}{2b} \\
r_2 + r_4 &= \frac{(a-b)^2}{a} + b - \frac{a}{2} = \frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{2a} \\
(r_1 + r_3) - (r_2 + r_4) &= \frac{a(a-b)}{2b} - \frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{2a} = \frac{a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - 2b^3}{2ab}
\end{aligned}$$

Mais on a vu que $a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - 2b^3 = 0$ d'où

$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4$$

Pour finir, puisque

$$\left(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - 2b^3\right)(a+b) = a^4 - 2b^4 - a^3b = a^3(a-b) - 2b^4 = 0$$

On en déduit que $\dfrac{b^2}{a-b} = \dfrac{a^3}{2b^2}$. Ce qui donne une nouvelle expression de c, à savoir

$$c = \frac{a^3}{2b^2}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
r_1 + r_3 - r_2 &= \frac{a\left(a-b\right)}{2b} - \frac{\left(a-b\right)^2}{a} = \left(a^2 - 2ab + 2b^2\right)\frac{\left(a-b\right)}{2ab} = 2b^3\frac{\left(a-b\right)}{2a^2b} = \frac{b^2\left(a-b\right)}{a^2} \\
r_3 &= \frac{a-b}{2} = \frac{b^2}{2c} = \frac{b^2}{2\dfrac{a^3}{2b^2}} = \frac{b^4}{a^3} \text{ car } c = \frac{b^2}{a-b} = \frac{a^3}{2b^2} \\
r_2 r_3 &= \frac{\left(a-b\right)^2}{a} \times \frac{b^4}{a^3} = \left(\frac{b^2\left(a-b\right)}{a^2}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\sqrt{r_2}\left(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}\right) = r_1 + r_3$$