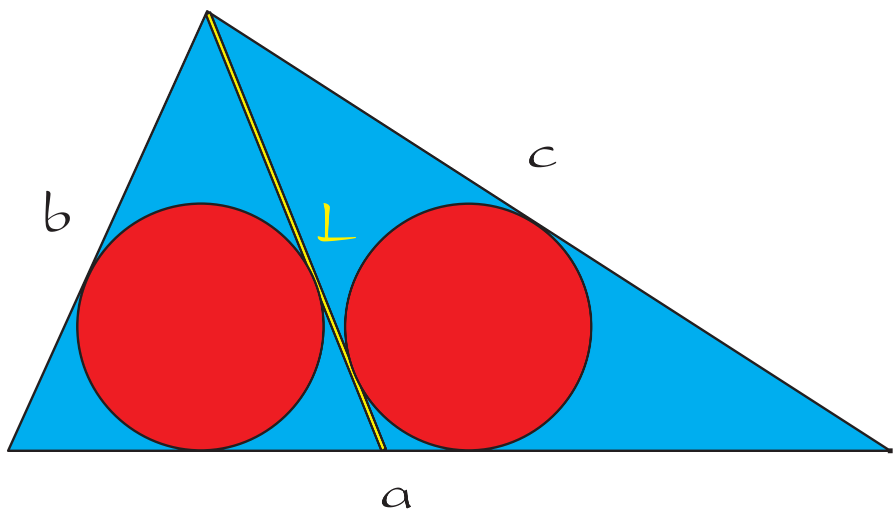
Sangaku : Deux cercles égaux dans un triangle.

G.Huvent

15 mars 2009



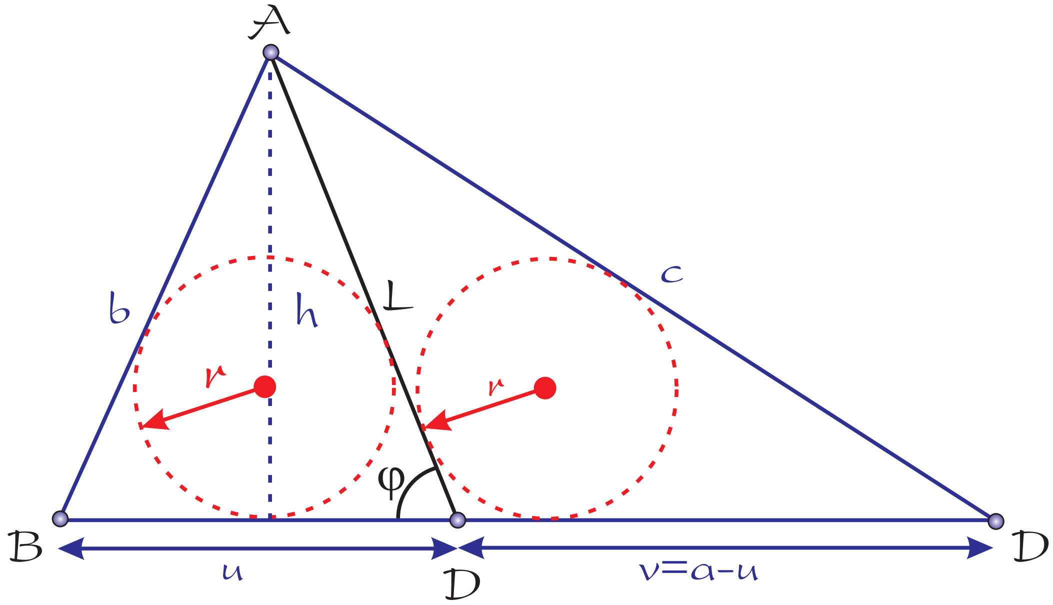
$$(b+c)^2-a^2 = 4L^2$$

Le sangaku qui suit est mentionné sur une tablette datée de 1897 et localisée dans la préfecture de Chiba. Le même problème est mentionné dans un ouvrage daté de 1781 de Seiyo Sanpo [1] . Etant donné un triangle ABC, on construit le point D du segment $[B, C]$ tel que les cercles inscrits à ABD et ADC aient même rayon. On désigne par L la longueur AD, et par a, b et c les longueurs des côtés opposés à B, C et A, il s'agit de prouver la relation

$$(b+c)^2 - a^2 = 4L^2$$

La tablette d'origine demande le calcul de L en fonction de a, b et c et forunit le résultat $L = \sqrt{p\,(p-a)}$ où $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre du triangle.

Les notations sont celles de la figure.



Le rayon des cercles inscrits aux triangles ABD et ACD étant le même, on a

$$2r = \frac{hu}{b+L+u} = \frac{hv}{c+L+v}$$

On obtient donc, après simplification par h, et passage à l'inverse

$$\frac{b+L+u}{u} = 1 + \frac{b+L}{u} = 1 + \frac{c+L}{v} = \frac{c+L+v}{v}$$

Compte tenu de $a = u + v$, on a

$$(c+L)\,u = (b+L)\,(a-u) \Longrightarrow u = \frac{a\,(c+L)}{(b+c+2L)}$$

et par symétrie des rôles

$$v = \frac{a\,(b+L)}{(b+c+2L)}$$

La formule d'Al kashi dans les triangles ABD et ACD s'écrit

$$\begin{array}{rcl} L^2 + u^2 - 2Lu\cos\varphi & = & b^2 \Longleftrightarrow b^2 - L^2 = u\,(u - 2L\cos\varphi) \\ L^2 + v^2 - 2Lv\cos(\pi - \varphi) & = & c^2 \Longleftrightarrow c^2 - L^2 = v\,(v + 2L\cos\varphi) \end{array}$$

Or

$$\begin{array}{rcl} u & = & \dfrac{a\,(c+L)}{(b+c+2L)} \Longrightarrow u\,(c-L) = \dfrac{a\,(c^2 - L^2)}{(b+c+2L)} = \dfrac{au\,(u - 2L\cos\varphi)}{(b+c+2L)} \Longrightarrow (c-L)\,(b+c+2L) = a\,(u - 2L\cos\varphi) \\ v & = & \dfrac{a\,(b+L)}{(b+c+2L)} \Longrightarrow v\,(b-L) = \dfrac{av\,(v + 2L\cos\varphi)}{(b+c+2L)} \Longrightarrow (b-L)\,(b+c+2L) = a\,(v + 2L\cos\varphi) \end{array}$$

d'où

$$(b+c)^2 - 4L^2 = (c-L)\,(b+c+2L) + (b-L)\,(b+c+2L) = a\,(u - 2L\cos\varphi + v + 2L\cos\varphi) = a\,(u+v)$$

On conclut avec $a = u + v$, pour obtenir

$$(b+c)^2 - a^2 = 4L^2$$

Références

[1] Fukagawa H., Pedoe D., *Japanese Temple Geometry Problems : San Gaku*, Charles Babbage Research Centre. Winnipeg, 1989.