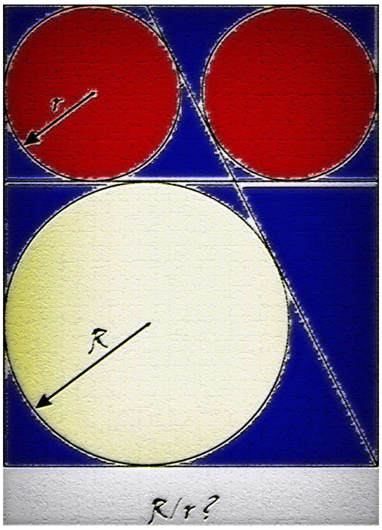
Un sangaku

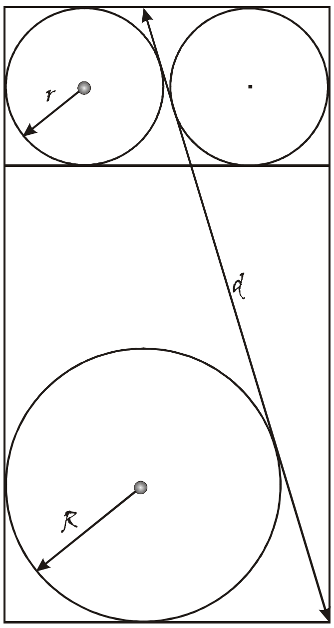


* * * * *

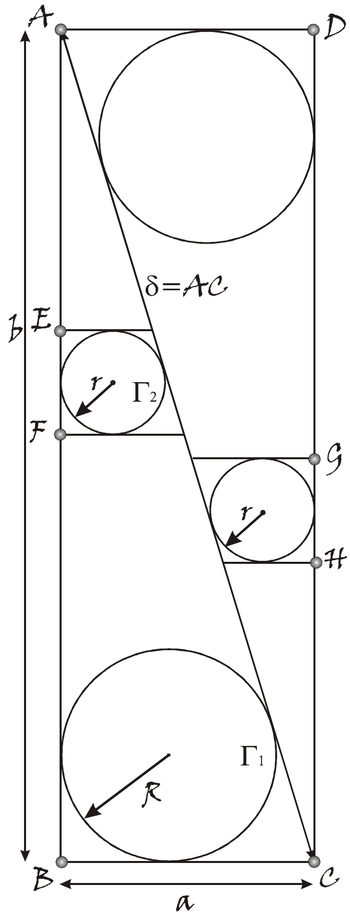
Géry Huvent

9 mars 2015

Le sangaku original est le suivant : On considère la figure suivante où les deux petits cercles ont même rayon. On demande la longueur de la diagonale d en fonction de r et R.



On considère la figure plus générale suivante :



Les cercles Γ_1 et Γ_2 sont homothétiques dans l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{r}{R}$. On a donc

$$AF = \frac{r}{R}b \text{ et } AE = AF - 2r = \frac{r}{R}b - 2r = \frac{r}{R}(b - 2R)$$

Par symétrie de la figure, $CH = AE$ et $CG = AF$. La configuration du sangaku est obtenue lorsque $AF + CH = b \iff \dfrac{r}{R}b + \dfrac{r}{R}(b - 2R) = \dfrac{2r(b-R)}{R} = b$. Cette égalité donne alors $b = \dfrac{2rR}{2r - R}$ qui s'écrit de manière plus élégante

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{R} - \frac{1}{2r}$$

On pose ensuite $\delta = AC$, on sait qu'alors

$$R = \frac{a + b - \delta}{2}$$

Ainsi par le thérorème de Pythagore

$$\delta^2 = a^2 + b^2 = (a + b - 2R)^2 \Longrightarrow 4R^2 - 4R(a+b) + 2ab = 0$$

d'où $a = \dfrac{2R(b-R)}{b - 2R}$. Mais avec $b = \dfrac{2rR}{2r-R}$, on obtient

$$a = \frac{R^2}{R - r}$$

Il en découle que

$$\delta = a + b - 2R = \frac{R^2}{R-r} + \frac{2rR}{2r-R} - 2R$$

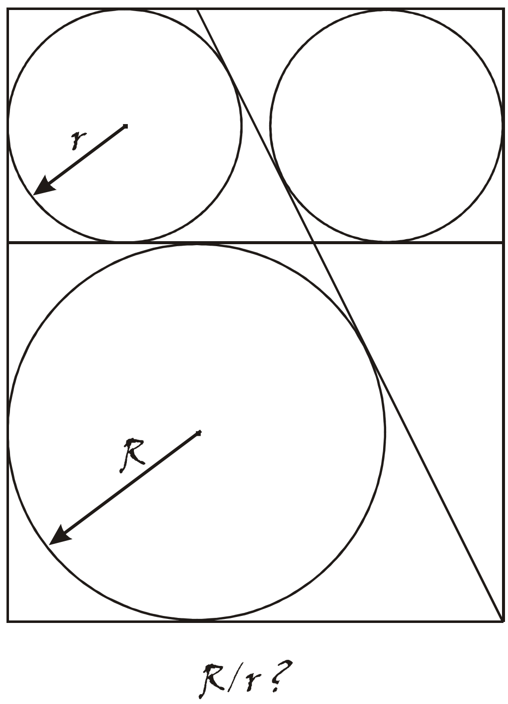
d'où

$$\delta = \frac{(R-r)^2 + r^2}{(R-r)(2r-R)} R$$

Pour conclure, $d = \frac{r}{R}\delta$ (condidérer l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{r}{R}$), ainsi

$$d = \frac{(R-r)^2 + r^2}{(R-r)(2r-R)} r$$

Complèments :
On peut également résoudre ce sangaku :



En effet, dans la configuration suivante cela revient à $b = 2(r+2R) \Longrightarrow \frac{2rR}{2r-R} - 2(r+2R) = 4\frac{\left(R^2 - r^2 - Rr\right)}{2r-R} = 0$, ainsi $x = \frac{R}{r}$ est racine de $x^2 = x + 1$ d'où

$$\frac{R}{r} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et un calcul simple donne

$$\frac{d}{r} = 5 + 2\sqrt{5} = 3 + 4\frac{R}{r} \text{ soit } d = 3r + 4R$$

Le lecteur pourra égélement démontrer que, dans ce cas,

$$\frac{3}{r} = \frac{4}{R} + \frac{5}{d} \text{ et } \frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{r}$$

la dernière exprimant que R est la moyenne harmonique de a et de r.