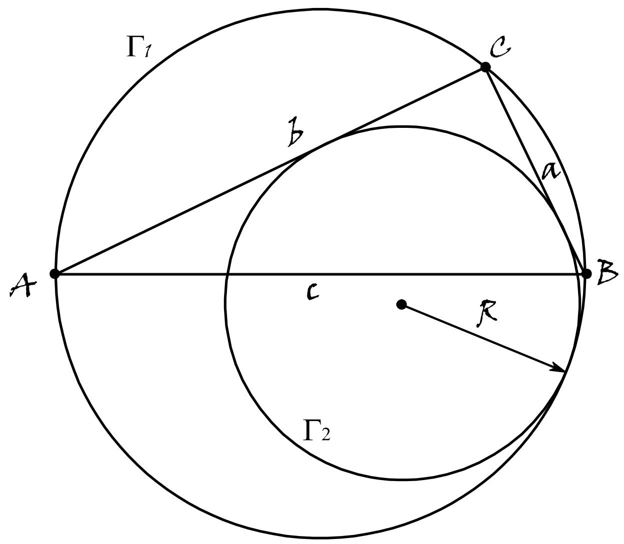
Deux cercles, un triangle rectangle ...

Géry Huvent

9 janvier 2019



Soit Γ_1 un cercle, $[A, B]$ un diamètre de Γ_1 et C un point de Γ_1. Soit r le rayon du cercle Γ_2 tangent intérieurement à Γ_1, à (AC) et à (AB). Si $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ alors

$$R = a + b - c$$

Ce sangaku (non daté) a disparu, il était exposé dans la préfecture de Hyogo.

$\boxed{\text{Solution}}$

On va montrer que le cercle Γ_2 est l'image du cercle inscrit à ABC par l'homothétie de centre C et de rapport 2. Soit I le centre du cercle inscrit, P et Q les points de contacts avec les segments $[B, C]$ et $[A, C]$.

On sait que $IP = IQ$, les conditions de tangence ($(IQ) \perp (AC)$ et $(IP) \perp (BC)$) et l'angle droit au sommet C du triangle ABC permettent d'affirmer que $IPCQ$ est un carré. Ainsi $IC = \sqrt{2}r$ où r est le rayon du cercle inscrit à ABC.

Si on note α l'angle au sommet A du triangle ABC, puisque $AO = OC$, l'angle $\widehat{OCA}$ vaut α (angles égaux dans un triangle isocèle). On en déduit que $(\widehat{\Omega CO}) = \frac{\pi}{4} - \alpha$.

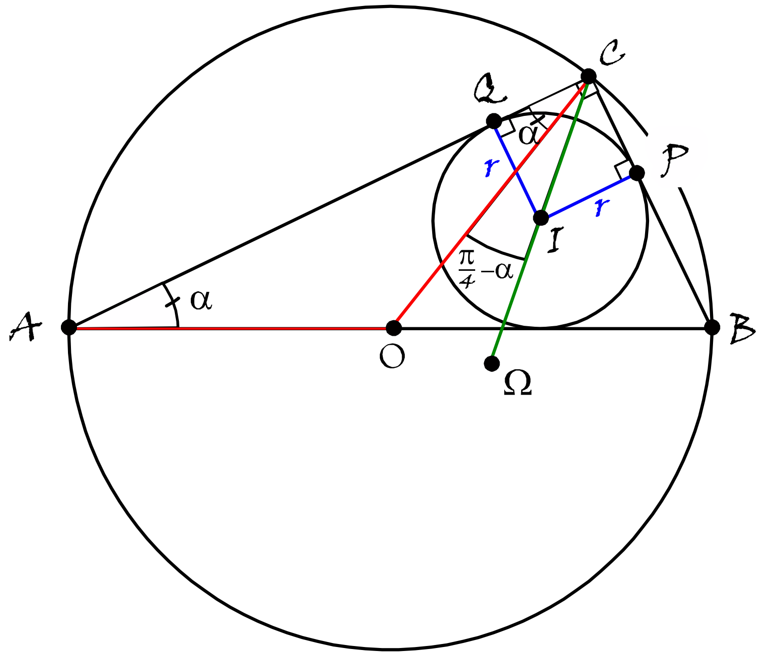
Puisque $OC = \frac{c}{2}$ et $\Omega C = 2IC = 2\sqrt{2}r$ (diagonale du carré), la formule d'Al Kashi donne

$$O\Omega^2 = OC^2 + \Omega C^2 - 2OC \times \Omega C \times \cos\left((\widehat{\Omega CO})\right)$$

Mais

$$\cos\left((\widehat{\Omega CO})\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha + \sin\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right)$$

car dans le triangle rectangle ABC, on a $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{b}{c}$ et $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{a}{c}$.



On en déduit que

$$O\Omega^2 = \frac{c^2}{4} + 8r^2 - 2r\,(a+b)$$

Or, un résultat connu cf par exemple [1]

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Ainsi

$$O\Omega^2 = \frac{c^2}{4} + 8r^2 - 2r\,(2r+c) = \frac{c^2}{4} + 4r^2 - 2rc = \left(\frac{c}{2} - 2r\right)^2$$

Si on note Γ_i l'image du cercle inscrit par l'homothétie de centre C et de rapport 2, alors Γ_i a pour centre Ω et pour rayon $2r$. Ce cercle Γ_i est tangent à AC et à BC. Son centre Ω est intérieur au cercle Γ_1, en effet

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 - O\Omega^2 = 2r\,(c-2r) = 2r\,(2c-a-b) = 2rc\,(2-\cos\alpha-\sin\alpha) \geq 0$$

Ainsi Γ_i est tangent au cercle Γ_1 si et seulement si

$$O\Omega = \frac{c}{2} - 2r$$

ce qui est vérifié. Le cercle Γ_i coïncide avec Γ_2 et son rayon vaut $a+b-c$.

Références

[1] Géry Huvent. « Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises ». (Dunod, Novembre 2008).