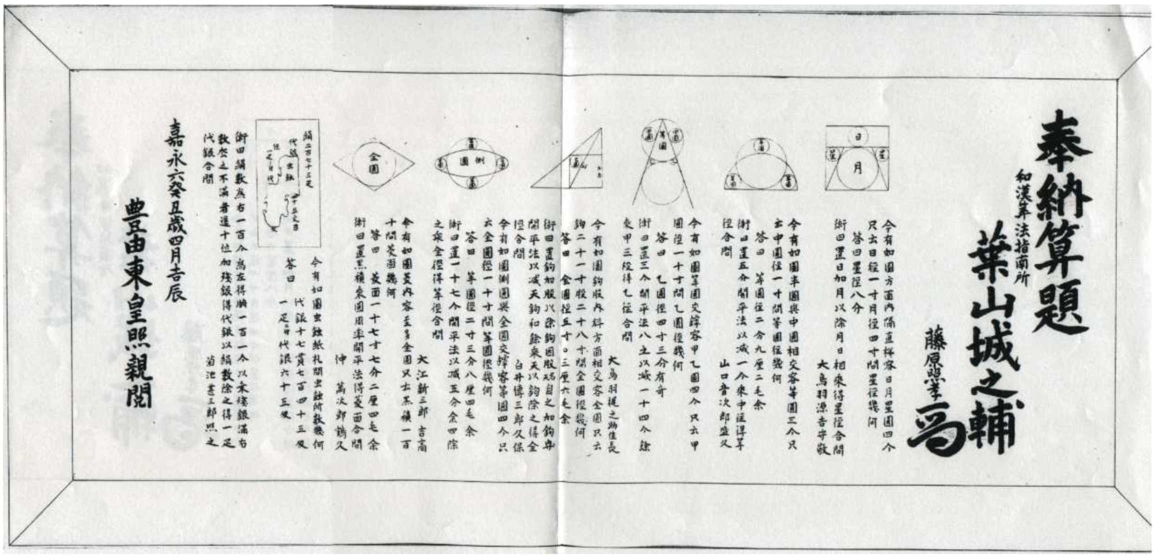
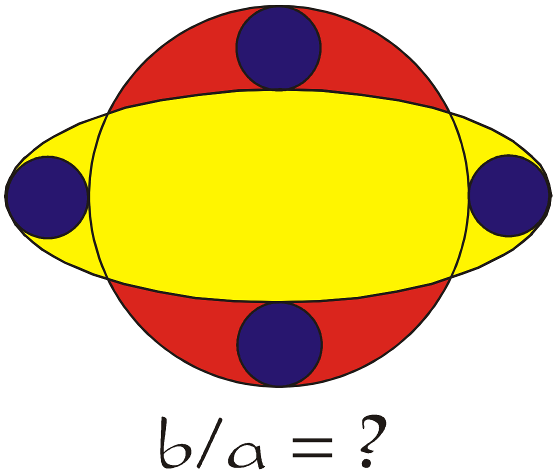
Variations sur un sangaku : Une ellipse, cinq cercles.

G.Huvent

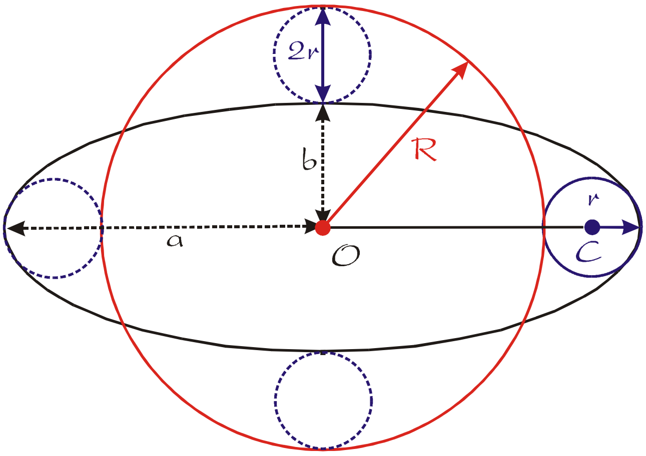
25 décembre 2009

Le premier sangaku m'a été inspiré par le cinquième problème du document suivant (voir [1]), situé dans le sanctuaire Takenobuinari, préfecture de Kyoto et daté de 1853.





Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b. On suppose que les cercles bleus sont de même rayon, tangents au cercle rouge. On suppose que deux d'entre eux sont osculateurs aux sommets principaux de l'ellipse, deux autres tangents extérieurment aux sommets secondaires. Les notations sont celles de la figure.



La condition de tangence aux sommets secondaires impose

$$b + 2r = R$$

Le rayon du cercle osculateur au sommet principal étant connu, on a

$$r = \frac{b^2}{a}$$

Ainsi

$$\frac{ab + 2b^2}{a} = R$$

Enfin

$$OC = R + r = a - r \Longrightarrow R = a - 2r = a - 2\frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - 2b^2}{a}$$

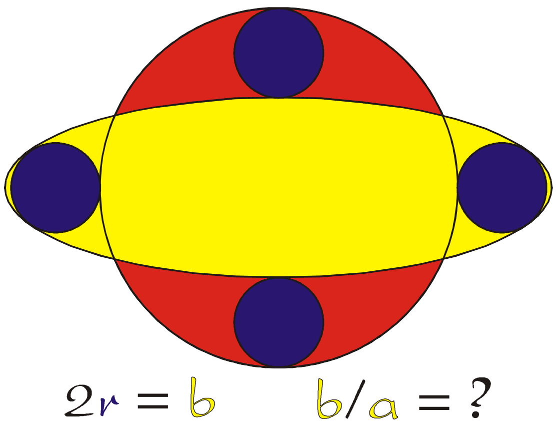
On en déduit que

$$ab + 2b^2 = a^2 - 2b^2$$

En posant $x = \dfrac{b}{a} \Longleftrightarrow b = xa$, il vient $4x^2 + x - 1 = 0$ soit

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{17} - 1}{8}$$

Le second sangaku est historique, mais je n'ai pas d'information sur son origine.



Dans ce problème, les cercles bleus ne sont plus osculateurs, mais leur rayon vaut $\frac{b}{2}$, ainsi $R = 2b = 4r$. Si C désigne le centre du cercle bleu centré sur l'axe OX et d'abcisse positive, alors

$$OC = R + r = \frac{5}{2}b$$

Mais, d'après [2]

$$OC^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}\left(b^2 - r^2\right)$$

d'où

$$\frac{25}{4}b^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}\left(b^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Longleftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

Références

[1] http ://www.wasan.earth.linkclub.com/kyoto/takenobu.html

[2] Géry Huvent. « Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises ». (Dunod, Novembre 2008).