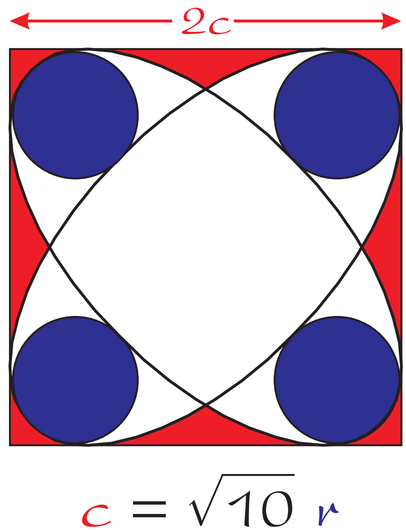
Un sangaku de la préfecture de Miyagi.

G.Huvent

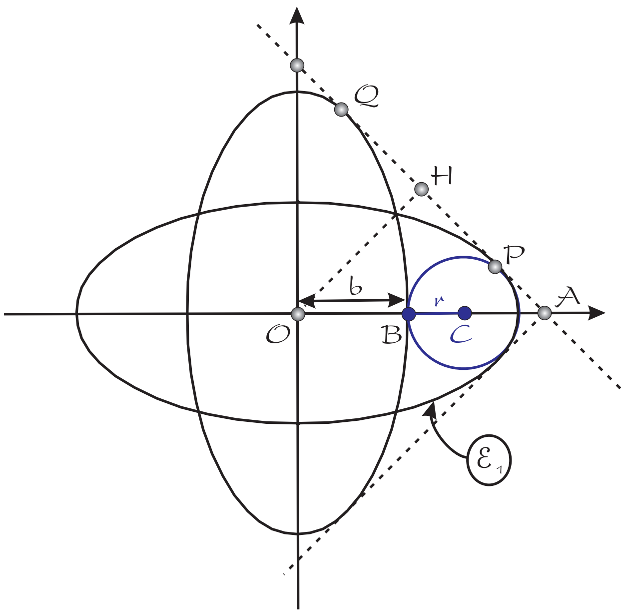
21 décembre 2009



Ce sangaku est daté de 1844, exposé dans la préfecture de Miyagi, la tablette n'existe plus [1]. Etant données deux ellipses isométriques et inscrites dans un carré de coté $2c$ comme indiqué sur la figure. On construit les quatre cercles osculateurs aux sommets principaux des ellipses. On suppose que ces cercles sont également tangents extérieurement à l'autre ellipse. Si r est le rayon commun des cercles, montrer que

$$c = \sqrt{10}r$$

Pour résoudre ce problème, on se place dans un repère othonormé dont l'axe des ordonnées et un axe principal pour une des ellipses.



Si a et b sont les demi grands axes et demi petits axes des ellipses, on sait (voir [2]) que

$$OC^2 = \frac{\left(a^2 - b^2\right)\left(b^2 - r^2\right)}{b^2}$$

Mais, les conditions de tangences donnent également

$$OC = b + r$$

De plus, les cercles étant osculateurs, il vient

$$r = \frac{b^2}{a}$$

En posant $x = \dfrac{b}{a}$, on obtient

$$\begin{aligned} r &= bx,\ OC = b \times (1 + x) \Longrightarrow OC^2 = b^2 (1 + x)^2 \\ \text{et } OC^2 &= \frac{\left(a^2 - b^2\right)}{b^2}\left(b^2 - b^2x^2\right) = b^2\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(1 - x^2\right) \end{aligned}$$

d'où (puisque $x > 0$).

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(1 - x^2\right) = (1 + x)^2 \Longleftrightarrow (x - 1)^2 \frac{(x + 1)^2}{x^2} = (1 + x)^2 \Longrightarrow (x - 1)^2 = x^2 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

On en déduit que

$$r = \frac{b}{2}$$

Il reste à calculer la longueur du côté du carré en fonction de b. On note $\mathcal{E}_1$ l'ellipse dont l'axe principal est l'axe des ordonnées et $\mathcal{E}_2$ l'autre ellipse. Le lecteur savant remarquera que l'on peut mener à l'ellipse $\mathcal{E}_1$ deux tangentes perpendiculaires des quatre sommets du carré. Ces sommets sont donc sur le cercle orthoptique, ou de Monge, de $\mathcal{E}_1$. Ce cercle ayant pour rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, la diagonale du carré a pour demi-longueur

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}c \Longrightarrow c = \sqrt{\frac{5}{2}}b \text{ car } a = 2b$$

d'où

$$c = \sqrt{10}r$$

Si l'on ne connaît pas ce résultat, on peut chercher les tangentes à $\mathcal{E}_1$ ayant pour pente -1. L'équation de $\mathcal{E}_1$ est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La tangente en $P = (x_0, y_0)$ à $\mathcal{E}_1$ a pour équation

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

sa pente est donc $p = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}$ lorsque $y_0 \neq 0$. On a

$$p = -1 \Longleftrightarrow x_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2}$$

Puisque $P \in \mathcal{E}_1$, cela donne

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = y_0^2 \times \frac{a^2 + b^2}{b^4} = 1 \Longrightarrow y_0 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } x_0 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Par symétrie par rapport à $y = x$ (échange de x et de y, puisque l'équation de $\mathcal{E}_2$ est $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$), les coordoonées de Q sont (y_0, x_0) et le milieu H du segment $[P, Q]$, projection orthogonale de O sur la tangente commune aux deux ellipses et côté du carré a pour coodonnées

$$H : \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)$$

Le calcul de $c = OH$ est alors immédiat.

Références

[1] Fukagawa H., Pedoe D., *Japanese Temple Geometry Problems : San Gaku*, Charles Babbage Research Centre. Winnipeg, 1989.

[2] Géry Huvent. « Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises ». (Dunod, Novembre 2008).