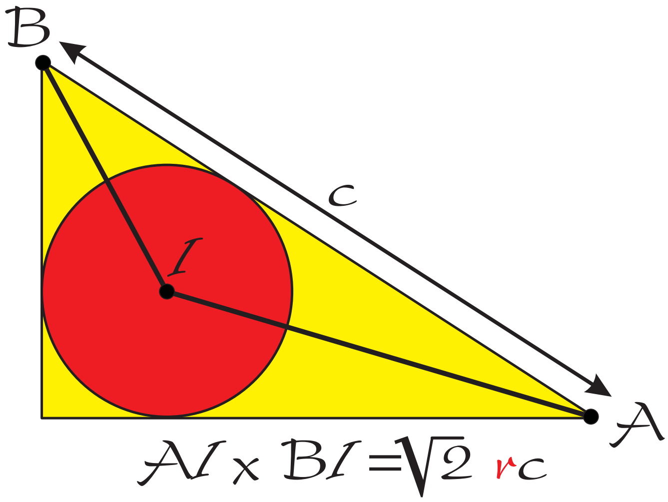
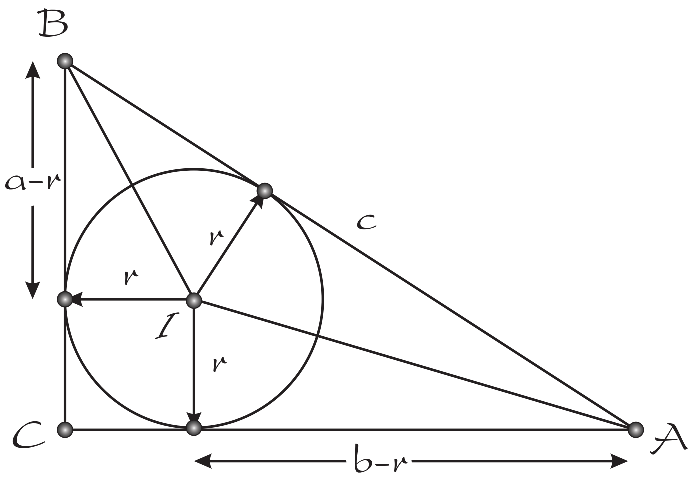
Le cercle inscrit dans un triangle rectangle.

G.Huvent

21 décembre 2009



On utilise les notations de la figure ci dessous.



On sait que $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, ainsi

$$b - r = \frac{b+(c-a)}{2} \text{ et } r = \frac{b-(c-a)}{2}$$

d'où

$$CI^2 = (b-r)^2 + r^2 = \frac{1}{4}\left[2b^2 + 2(c-a)^2\right] = \frac{1}{2}\left[b^2 + c^2 + c^2 - 2ac\right] = c(c-a) \text{ car } c^2 + b^2 = a^2$$

de même, par échange des rôles,

$$BI^2 = c(c-b)$$

Ainsi

$$AI^2 BI^2 = c^2 (c-a)(c-b)$$

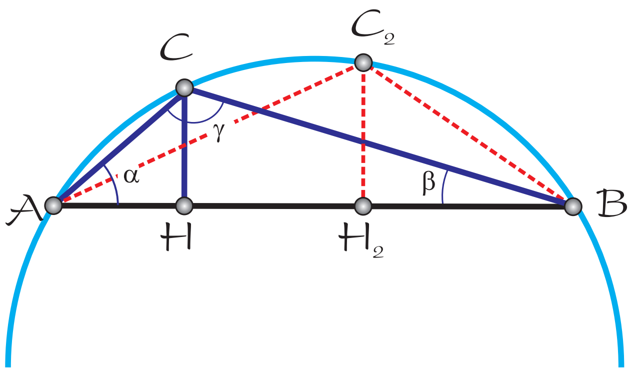
Il suffit donc de prouver que

$$(c-a)(c-b) = 2r^2 \iff r^2 = \frac{(c-a)(c-b)}{2}$$

Or

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc\right) = \frac{1}{2}\left(c^2+ab-ac-bc\right) \\ \text{et } \frac{(c-a)(c-b)}{2} &= \frac{1}{2}\left(c^2+ab-ac-bc\right) \end{aligned}$$

On peut donner une autre preuve, plus éclairante de ce sangaku et qui s'appuie sur deux autres résultats. Le premier s'énonce ainsi. Soit $\mathcal{C}$ un cercle et $[A,B]$ une corde de $\mathcal{C}$. Lorsque C décrit l'arc $\overset{\frown}{AB}$, le rapport $\dfrac{CA \times CB}{CH}$ où H est la projection orthogonale de C sur $[A,B]$ est constant.



Dans le triangle ABC, soit α, β et γ les angles aux sommets A, B et C. On a alors

$$CH = CA\sin\alpha = CB\sin\beta \Longrightarrow CA \times CB = \frac{CH^2}{\sin\alpha\sin\beta} \tag{1}$$

Mais la loi des sinus dans le triangle ABC donne

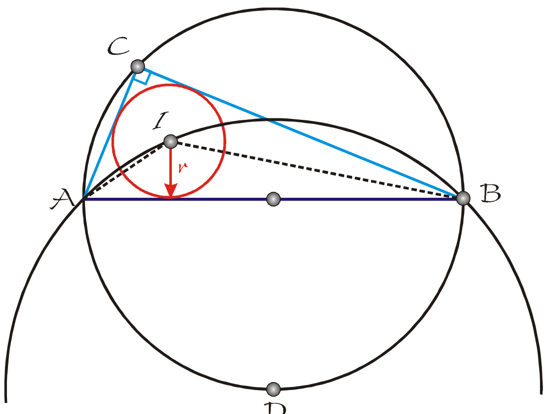
$$\frac{CA}{\sin\beta} = \frac{CB}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\gamma} \Longrightarrow CA \times CB = \frac{AB^2}{\sin^2\gamma}\sin\alpha\sin\beta \tag{2}$$

En multipliant les deux égalités (1) et (2), il vient

$$\left(\frac{CA \times CB}{CH}\right)^2 = \frac{AB^2}{\sin^2\gamma} \Longrightarrow \frac{CA \times CB}{CH} = \frac{AB}{\sin\gamma}$$

D'après le théorème de l'arc capable, l'angle γ est constant lorsque C décrit l'arc $\overset{\frown}{AB}$, ce qui prouve que le rapport $\dfrac{CA \times CB}{CH}$ est constant.

Le second résultat concerne le lieu du cercle du cercle inscrit à un triangle rectangle. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[A,B]$, lorsque C décrit l'arc $\overset{\frown}{AB}$ le centre du cercle inscrit au triangle (rectangle) ABC décrit un arc de cercle.



En effet, soit I le centre du cercle inscrit, dans le triangle ABC, soit α et β les angles aux sommets A et B, dans le triangle BCI, les angles aux sommets A et B valent $\dfrac{\alpha}{2}$ et $\dfrac{\beta}{2}$. On en déduit que lorsque C décrit l'arc $\overset{\frown}{AB}$, l'angle au sommet I du triangle BCI est constant égal à $\pi - \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$. D'après le théorème de l'arc capable, le point I décrit un arc de cercle (dont le centre est le point D de la figure) passant par A et B.
En appliquant le premier résultat, on obtient

$$\frac{AI \times BI}{r} = \frac{AB}{\sin \frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}AB$$

ce qui est le résultat demandé par le sangaku.