Le jeu de Pile ou Face (II)

M.Gouy G.Huvent A.Ladureau

13 novembre 2002

Pierre et Paul jouent à pile ou face avec une pièce de monnaie. Chacun lance la pièce n fois.
Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent chacun le même nombre de fois pile ?

1 Simulation sur calculatrice et ordinateur

On désire effectuer une simulation de ce jeu. On va donc simuler un nombre E de parties où Pierre et Paul lance chacun n fois le dés.
On a besoin des variables suivantes.
La variable n égale au nombre de lancers de chaque joueur.
La variable E représente le nombre de parties simulées
La variable S représente le nombre de succès (i.e. lorsque Pierre et Paul ont obtenu le même nombre de fois pile)
La variable $L1$ est une liste à deux éléments dans laquelle on comptabilise le nombre de fois où pile apparaît pour Pierre et Paul dans chaque partie.

1.0.1 Algorithme

```
Demander le nombre N de lancers
Demander le nombre d'essais E
Mettre 0 dans S
Pour I allant de 1 à E
    Créer la liste L1={0 ;0}
    Pour J allant de 1 à N
        On tire au hasard entre 0 et 1 deux nombres A et B
        Si A<0.5 alors L1(1) augmente de 1
        Fin du Si
        Si B<0.5 alors L1(2) augmente de 1
        Fin du Si
    Fin du Pour J
    Si L1(1)=L1(2) Alors S augmente de 1
    Fin du Si
Fin du Pour I
Afficher S/E
```

1.1 Sur calculatrice

TI-89	TI-83	CASIO
pilfac()	Prompt N :Prompt E	"N=" ?→N :"E=" ?→E
prgm	0→S	0→S
Prompt n :Prompt e	For(I,1,E,1)	For 1→I to E Step 1
0→s	{0,0}→L_1	{0,0}→List 1
For i,1,e,1	For(J,1,N,1)	For 1→J to N Step 1
{0,0}→l1	If Rand<0.5	If Ran#<0.5
For j,1,n,1	Then	then
If rand()<0.5 then	L_1(1)+1→L_1(1)	List 1[1]+1→List 1[1]
l1[1]+1→l1[1]	End	IfEnd
Endif	If Rand<0.5	If Ran#<0.5
If rand()<0.5 then	Then	then
l1[2]+1→l1[2]	L_1(2)+1→L_1(2)	List 1[2]+1→List 1[2]
Endif:Endfor	End	IfEnd :Next
If l1[1]=l1[2] then	End	If List 1[1]=List 1[2]
s+1→s	If L_1(1)=L_1(2)	then
Endif	Then	S+1→S
Endfor	S+1→S	IfEnd
Disp s/e	End	Next
EndPrgm	End :Disp S/E	S/E

1.1.1 Exemples de résultats obtenus pour $n = 50$:

$E =$	500	1000	1000	2000	2000	5000	5000	5000
$p =$	0.086	0.074	0.08	0.068	0.081	0.0774	0.0735	0.087

1.2 Avec Le logiciel MAPLE

Le programme suivant réalise la simulation

```
> pilfac1 :=proc(n,e) local p,s,i,j,q,alea;
s :=0;
alea :=rand(0..1);
for i from 1 to e
do
p :=0;
q :=0;
for j from 1 to n
do
if alea()=0 then
q :=q+1
fi;
if alea()=0 then
p :=p+1
fi;
od;
if p=q then
s :=s+1
fi;
od;
evalf(s/e,5);
end;
```

On obtient alors comme réponse

```
> pilfac1(50,20000);pilfac1(50,20000);pilfac1(50,20000);
                              .081200

                              .082600

                              .079100
```

2 A la recherche d'une démonstration

On note X et Y les variables aléatoires égales au nombre d'apparitions de pile quand Pierre et Paul effectuent leurs n lancers. X et Y suivent la même loi binomiale $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On a

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k \text{ et } Y=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \right) \times \left(C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)^2 \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 \end{aligned}$$

Ce qui nous amène à calculer

$$S = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$$

2.1 Calcul de S

2.1.1 Par le binôme de newton

On peut, pour ce calcul utiliser

$$(1+x)^n \times (1+x)^n = (1+x)^{2n}$$

En comparant dans les deux expressions le terme d'exposant n, on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \times C_n^{n-k} &= C_{2n}^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \times C_n^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire que

$$P(X=Y) = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$$

ce qui pour $n = 50$ nous donne : $P(X=Y) \approx 0.079589$

Remarque 1 *Si on écrit S sous la forme $S = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k}$, S apparaît comme le "produit de Cauchy" de la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k$ par elle même (avec la convention $C_n^k = 0$ si $k > n$). Il est alors "naturel" de considérer le coefficient en x^n dans $(1+x)^n \times (1+x)^n$.*

Remarque 2 *Il est surprenant que la probabilité obtenue est celle de l'équirépartition. Tout se passe comme si on lance $2n$ fois le dé et on cherche la probabilité d'avoir autant de face que de pile.*

2.1.2 Raisonnement de dénombrement

On considère deux classes de n élèves. On choisit n élèves sélectionnés parmi les deux classes. Le nombre de choix possibles est C_{2n}^n. Pour réaliser ce choix, on peut prendre k élèves dans la première classe (il y a C_n^k possibilités) et $n-k$ élèves dans la seconde (il y a C_n^{n-k} possibilités). On obtient alors

$$\begin{aligned} C_{2n}^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 \text{ car } C_n^k = C_n^{n-k} \end{aligned}$$

2.1.3 Remarque

Le calcul de S n'est qu'un cas particulier de l'identité générale suivante

$$C_{p+q}^n = \sum_k C_p^k C_q^{n-k}$$

où la somme porte sur tous les indices k (avec la convention que $C_u^v = 0$ si $v > u$ et si $v < 0$).
Cette identité porte le nom de convolution de Vandermonde[1].

2.2 Etude asymptotique de $P(X = Y) = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$

On peut se demander quel est le comportement de la probabilité trouvée quand n tend vers $+\infty$.
On pose $p_n = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$. Un calcul élémentaire donne

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 - \frac{1}{2(n+1)} < 1$$

La suite $(p_n)_n$ est décroissante minorée par 0, elle converge. Quelle est sa limite ?
On va prouver

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0$$

2.2.1 Un encadrement de p_n

On considère le produit

$$\Pi_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}$$

que l'on écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \Pi_n &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n}{2n} \\ &= \frac{(2n)!}{(2 \times 4 \times \cdots \times 2n)^2} \\ &= \frac{(2n)!}{(2^n \times 1 \times 2 \times \cdots \times n)^2} \\ &= \frac{C_{2n}^n}{4^n} = p_n \end{aligned}$$

[1] Vandermonde a rédigé un article à propos de cette somme en 1772. Il s'avère cependant que cette identité était déjà connue d'un mathématicien chinois, Chu Shih-Chieh en 1303. Peu de gens savent que les coefficients du binôme étaient connus en Chine bien avant qu'ils ne le soient des occidentaux.

Puisque

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} \text{ et plus généralement } \frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$$

on a

$$\Pi_n < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{2(n-1)}{2n-1} \times \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)\,\Pi_n}$$

d'où

$$\Pi_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \Longleftrightarrow C_{2n}^n < \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}$$

De la même manière

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{3} \text{ et plus généralement } \frac{2k-1}{2k} = \frac{2k-1}{2k-1+1} > \frac{2k-1-1}{2k-1} = \frac{2k-2}{2k-1}$$

ce qui donne

$$2\Pi_n = \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n} > \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{2n-2}{2n-1} = \frac{1}{2n\Pi_n}$$

d'où

$$\Pi_n > \frac{1}{2\sqrt{n}} \Longleftrightarrow \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < C_{2n}^n$$

En conclusion

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} < C_{2n}^n < \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}$$

ce qui prouve que

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < p_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

et ainsi

$$p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarque 3 *On peut prouver par récurrence l'encadrement suivant pour le coefficient C_{2n}^n.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq C_{2n}^n \leq \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$$

2.2.2 Un équivalent de p_n

La détermination d'un équivalent de p_n est un peu plus subtile. Elle est basée sur l'étude des intégrales de Wallis[2]. L'étude de ces intégrales est un autre grand classique pour les élèves de Terminale scientifique et des premiers cycles de l'enseignement supérieur. On rappelle leur définition.

Définition 4 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les intégrales de Wallis par*

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \underset{x=\frac{\pi}{2}-u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du$$

[2] *John Wallis (1616-1703) tient dans l'histoire des sciences du XVIII^e siècle une place importante. Il s'est fait connaître comme mathématicien en 1642 en décryptant la correspondance diplomatique étrangère. Fondateur, avec Wren (géomètre, astronome et architecte) de la Royal Society, il réorganisa les archives scientifiques détruites par l'incendie de Londres, il publia pour ses compatriotes les grandes oeuvres classiques de l'antiquité, celles des arabes du XIII^e ainsi que les travaux de ses prédécesseurs. Ces oeuvres et les travaux de Wallis furent les sources où puisa le génie de Newton. On peut voir en Wallis un précurseur de l'analyse moderne. Il est le premier à envisager l'analyse comme la traduction de phénomènes continus. C'est bien là que Newton et Leibniz, inventeurs du calcul différentiel et intégral, ont trouvé l'inspiration. Signalons qu'en dehors des travaux de grammaire, de théologie et d'acoustique, Wallis a conçu en mécanique le principe de conservation de la quantité de mouvement, principe repris par ... Newton ! Eclipsé par la gloire de Newton, on doit pourtant à Wallis l'usage en mathématiques d'un symbolisme universel. Il nous en est resté le symbole "$\times$" pour la multiplication, les signes "$<$" et "$>$" et surtout le symbole "∞" de l'infini. Quand à la formule de Wallis, $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10....}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11....} = \lim\limits_{p\to\infty} \frac{(2.4....2p)^2}{(1.3.5...2p-1)^2 2p+1}$ celle-ci étant peu précise pour le calcul de π (calcul très important à l'époque où le problème de la quadrature du cercle était au centre des recherches), sa découverte n'a eu aucune incidence notable. Néanmoins, historiquement, il s'agit de la première fois où π apparait comme limite de nombres rationnels.*

Un calcul élémentaire donne

$$I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1,\ I_2 = \frac{\pi}{4}$$

De l'inégalité

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leq \sin^n x \leq \sin^{n+1} x$$

on déduit que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.

Relation de récurrence pour $(I_n)_n$ Une intégration par partie permet d'obtenir

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[-\sin^{n+1}(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\sin^n(x)\cos^2(x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\sin^n(x)\left(1-\sin^2 x\right)dx \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)\,I_{n+2} = (n+1)\,I_n \tag{1}$$

Les intégrales de Wallis se calculent donc de "deux en deux".
Cette relation de récurrence donne, en multipliant par I_{n+1} prouve que la suite de terme général $(n+1)\,I_{n+1}I_n$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.

Calcul de I_n La relation de récurrence 1 donne

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$$

(la division par $I_n \neq 0$ est possible). On en déduit que

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} I_0 && (2) \\ &= \Pi_n \times I_0 && (3) \\ &= p_n \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Formule de Wallis De la décroissance de $(I_n)_n$ et de $\dfrac{I_{n-1}}{I_{n+1}} = \dfrac{n+1}{n}$ on déduit l'inégalité

$$1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

Combinée avec $(n+1)\,I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

ainsi[3]

$$I_{2n} = p_n \times \frac{\pi}{2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \Longleftrightarrow p_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Remarque 5 *Avec $n = 50$, on obtient*

$$P(X = Y) \simeq 0,079589 \ \textit{et}\ \frac{1}{\sqrt{50\pi}} \simeq 0,07978$$

ce qui est déjà remarquable !

[3] On peut s'etonner, comme Laplace dans son *Essai philosophique sur les probabilités*, de l'apparition du nombre π dans le domaine des probabilités élémentaires.