De l'ordre dans le désordre

M.Gouy G.Huvent A.Ladureau

10 mars 2003

On raconte souvent que G.H.Hardy rendant visite à Ramanujan lui avait fait remarqué que son taxi portait le numéro 1729 et que cet entier lui semblait tout à fait banal[a].
Que se serait-il passé si le taxi de G.H.Hardy avait porté le numéro 702 ?
Ramanujan aurait alors sans doute répondu ceci :

> $\ll$ 702 est loin d'être un entier banal. Prenez son premier chiffre et transférez le en dernière position. Vous obtenez 27, faites le rapport $\dfrac{702}{27}$. Ce dernier s'avère être entier[b] !
> Cherchez alors d'autres entiers ayant cette propriété, vous en trouverez beaucoup que l'on peut qualifier de triviaux (par exemple $10, 11, 100, 22$).
> Eliminez ces derniers, il en reste une infinité dont le plus petit est 702 (et le suivant 703, mais ensuite ...).
> Posez vous la question de déterminer les entiers ayant cette propriété. Puis, cherchez si ces entiers ont d'autres propriétés. Enfin, envisagerez le rapport inverse et posez vous les mêmes questions.$\gg$

Pour répondre à celles-ci, on introduira la notion d'ordre d'un élément modulo n. On envisagera ensuite une autre approche basée sur le développement décimal des rationnels. Cela vous amènera à redécouvrir l'entier magique de Lewis Carroll et ses propriétés.

[a] Et d'après vous l'est-il. Si vous connaissez cette histoire vous répondrez non. Ce qui vous étonnera plus c'est qu'il y a deux bonnes raisons de répondre non. Quelles sont-elles ?
[b] Et de plus ce rapport est 26, soit $27 - 1$, étonnant.

1 L'ordre d'un élément inversible modulo n

On rappelle ici quelques résultats importants. Le principal outil dont nous aurons besoin est la notion d'ordre d'un élément. Cette notion très utile peut être introduite rapidement en arithmétique.
Commençons par deux définitions

Définition 1 *Soit n un entier au moins égal à 2, on note Z_n l'ensemble*

$$Z_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$

Définition 2 *On définit U_n comme l'ensemble des entiers k de Z_n premiers avec n, ainsi $k \in U_n$ si et seulement si $\text{pgcd}(k, n) = 1$.*

On rappelle que l'on note $\phi(n)$ le cardinal de U_n, la fonction ϕ est l'indicateur d'Euler (ou fonction Totient)

Exemple 3 *Si $n = 20$, les entiers premiers avec n sont $1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$ ainsi $U_{20} = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ et $\phi(20) = 8$*

Exercice 4 *Déterminer $\phi(n)$ pour les premières valeurs de n, que vaut $\phi(p)$ si p est premier ?*

Quelle est la principale propriété des éléments de U_n ? Ces derniers sont inversibles modulo n, plus précisément

Proposition 5 *Si $a \in U_n$ alors il existe $u \in U_n$ tels que $a \times u \equiv 1 \ (n)$*
Preuve. *En effet d'après le théorème de Bézout, il existe u et v tels que $au + nv = 1$.* ■

On peut maintenant introduire la notion d'ordre d'un élément. Soit $a \in U_n$ considérons les différents restes des divisions de a^k par n lorsque k décrit $\mathbb{N}$. Ces restes ne prennent qu'un nombre fini de valeurs (au plus n valeurs distinctes), il existe donc nécessairement deux indices distincts i et j tels que $a^i - a^j$ soit divisible par n (Pour $k = 0, 1, \cdots, n$, il y a $n+1$ restes, par application du principe des tiroirs deux au moins sont identiques).
Mais si par exemple $i > j$, alors $a^i - a^j = a^j\left(a^{i-j} - 1\right)$. Puisque a est dans U_n, il existe u tel que $a \times u \equiv 1 \ (n)$, mais alors $u^j \times a^j \times \left(a^{i-j} - 1\right) = u^j \times \left(a^i - a^j\right) \equiv u^j \times 0 \ (n)$ et $u^j \times a^j \times \left(a^{i-j} - 1\right) \equiv 1 \times \left(a^{i-j} - 1\right)$ donc $a^{i-j} \equiv 1 \ (n)$.
Ce résultat permet de donner la définition suivante

Définition 6 (Ordre d'un élément modulo n) *L'ordre d'un élément $a \in U_n$ est le plus petit entier $k > 0$ tel que*

$$a^k = 1 \ (n)$$

N'oublions pas que pour pouvoir parler du plus petit entier vérifiant une propriété, il est indispensable d'établir l'existence d'entier vérifiant la dite propriété[1].

Exercice 7 *Pour $n = 7$ qui est premier, déterminer l'ordre des éléments de U_7. En particulier l'ordre de 3.*

La notion d'ordre permet alors de déterminer quand la puissance d'un entier est congrue à 1 modulo n. Si p est un entier strictement positif tel que $a^p \equiv 1 \ (n)$, en effectuant la division euclidienne de p par l'ordre k de a, on en déduit que $a^p \equiv a^{kq+r} \equiv a^r \ (n)$ ainsi par minimalité de k, on a nécessairement $r = 0$.
Ceci prouve le théorème suivant.

Théorème 8

$$a^p \equiv 1 \ (n) \Longleftrightarrow \textit{l'ordre de } a \textit{ divise } p$$

Exercice 9 *A quelle condition a-t-on $3^p \equiv 1 \ (7)$?*

[1] En fait, on peut prouver (Théorème d'Euler) que $a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (n)$. En particulier l'ordre de $a \in U_n$ divise $\phi(n)$.

2 Récréations Mathématiques à la Lewis Carroll

Soit n un nombre entier naturel, on construit n_1 ainsi : on transfère le premier chiffre de l'écriture en base 10 de n, en dernière position (ainsi 123 devient 231).

Problème 1 *Quels sont les entiers n tels que* $\frac{n_1}{n}$ *soit un entier au moins égal à 2 ?*

Problème 2 *Quels sont les entiers n tels que* $\frac{n}{n_1}$ *soit un entier au moins égal à 2 ?*

2.1 Recherche expérimentale avec Maple

On peut chercher expérimentalement s' il existe des solutions (On trouvera en annexe les programmes permettant les simulations avec une TI89).
On définit pour cela plusieurs procédures.

La procédure transfert a pour paramètre d'entrée un entier n et pour paramètre de sortie l'entier n_1

```
> Transfert:=proc(n)
local nbchiffre,n_sans_premier_chiffre,premier_chiffre,n1;
nbchiffre:=floor(evalf(ln(n)/ln(10)))+1;
n_sans_premier_chiffre:=n mod 10^(nbchiffre-1);
premier_chiffre:=(n-n_sans_premier_chiffre)/10^(nbchiffre-1);
n1:=10*n_sans_premier_chiffre+premier_chiffre;
end:
```

La procédure problème_1 détermine si l'entier n est solution du problème 1.

```
> probleme1:=proc(n)
local rapport;
rapport:=Transfert(n)/n;
if (is(rapport,integer) and rapport>1)
then
lprint(`L'entier`,n,`est solution du problème 1, le rapport n1/n est égal
à`,rapport);
fi
end:
```

On peut ainsi tester si, parmi les entiers compris entre 10 et 2000, il existe une solution au problème 1.

```
> for n from 10 to 2000 do probleme1(n) od;
```

L'absence de réponse suggère que, a priori, il n'y a aucune solution.

Passons au problème 2, on définit donc de même une procédure problème2

```
> probleme2:=proc(n)
local rapport;
rapport:=n/Transfert(n);
if (is(rapport,integer) and rapport>1)
then
lprint(`L'entier`,n,`est solution du problème 2, le rapport
n/n1 est égal à`,rapport);
fi
end:
```

On teste alors les entiers de 10 à 2000 (voir les résultats à la page suivante)
On constate que mis à part les solutions triviales (comme par exemple $n = 10$, $n_1 = 1$), on trouve des solutions, par exemple 702 et 703.

On est ainsi tenté de formuler les deux conjectures suivantes :

Conjecture 1 : Le premier problème n'a pas de solution

Conjecture 2 : Le second problème admet des solutions pour certaines valeurs de p mais par pour toutes.

Recherche expérimentale de solutions au problème 2

```
>  for n from 10 to 2000 do probleme2(n) od;
L'entier   10   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à  10
L'entier   20   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à  10
L'entier   30   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à  10
L'entier   40   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à  10
L'entier   50   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à  10
L'entier   60   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à  10
L'entier   70   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à  10
L'entier   80   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à  10
L'entier   90   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à  10
L'entier   100   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   100
L'entier   200   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   100
L'entier   300   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   100
L'entier   400   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   100
L'entier   500   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   100
L'entier   600   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   100
L'entier   700   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   100
L'entier   702   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   26
L'entier   703   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   19
L'entier   800   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   100
L'entier   900   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   100
L'entier   1000   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   1000
L'entier   1001   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   91
L'entier   1010   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   10
L'entier   2000   est solution du problème 2, le rapport n/n1 est égal à   1000
```

2.2 Le premier problème (approche arithmétique)

Si la première conjecture vous semble vraie, c'est une erreur. Il y a des solutions au premier problème, mais relativement peu et surtout la plus petite est déjà grande ! Pour vous rassurer, citons une conjecture du grand Euler :

Il n'y a pas de solution à l'équation en nombres entiers $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$

Malheureusement, une solution est $2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$, elle fût donnée par Noam Elkies en 1988. Preuve qu'une recherche expérimentale infructueuse doit vous inciter à rester prudent.

2.2.1 Mise en équation du problème

Avant tout, signalons que les solutions au premier problème ont au moins deux chiffres. Ecrivons $n = \overline{a_l a_{l-1} \cdots a_0}$ (avec $l \geq 1$, $a_l \neq 0$ et $0 \leq a_i \leq 9$ pour $0 \leq i < l$) où $l+1$ est le nombre de chiffres de n, alors $n_1 = \overline{a_{l-1} \cdots a_0 a_l}$. Si on considère $10n$,on a

$$\begin{aligned} 10n &= \overline{a_l \underbrace{a_{l-1} \cdots a_0 0}_{n_1 - a_l}} \\ &= a_l 10^{l+1} + (n_1 - a_l) \end{aligned}$$

Supposons que $\dfrac{n_1}{n} = p \in \mathbb{N}$. Alors

$$10n = a_l 10^{l+1} + (pn - a_l)$$

soit

$$(10 - p)\, n = a_l \left(10^{l+1} - 1\right) \tag{1}$$

Ce qui permet d'affirmer que

$$p < 10$$

En fait l'égalité (1) peut aussi s'écrire

$$a_l \left(p10^l - 1\right) = (10 - p)\left(n - a_l 10^l\right) \tag{2}$$

2.2.2 Une inégalité de contrôle

Puisque $n - a_l 10^l = \overline{a_{l-1} ... a_0} < 10^l$, on a

$$\begin{aligned} & a_l \left(p10^l - 1\right) < (10 - p)\, 10^l \\ \Longrightarrow\quad & 10^l p\,(1 + a_l) < 10^{l+1} + a_l \\ \Longrightarrow\quad & p\,(1 + a_l) < 10 + \frac{a_l}{10^l} < 10 + \frac{9}{10^l} \end{aligned}$$

mais $p\,(1 + a_l)$ est un entier, ainsi

$$p\,(1 + a_l) \leq 10 \tag{3}$$

Cette inégalité nous montre que p n'est pas trop grand, plus précisément de $a_l \geq 1$, on déduit que

$$p \leq 5$$

2.2.3 Quelle valeur pour p ?

L'inégalité (3) et quelques considérations simples vont nous permettre de déterminer p.

- $p = 5$?
  L'égalité (2) montre que 5 divise $a_l = 5$, et (3) prouve que $a_l = 1$. Contradiction.
- $p = 4$?
  L'égalité (2) prouve que a_l est pair, donc au moins égal à 2, mais (3) prouve que $a_l < 2$. Contradiction.
- $p = 2$?
  L'égalité (2) prouve que a_l est divisible par 8 donc est égal à 8, et (3) prouve que $a_l \leq 4$. Contradiction.

Conclusion 10 *Une seule possibilité pour p*

$$p = 3$$

Mais alors l'inégalité (3) donne

$$a_l = 1 \text{ ou } a_l = 2$$

2.2.4 Solution au premier problème

L'égalité (2) devient alors

$$7\sum_{k=0}^{l-1} a_k 10^k = \left(3\times 10^l - 1\right) \text{ si } a_l = 1 \tag{4}$$

$$7\sum_{k=0}^{l-1} a_k 10^k = 2\left(3\times 10^l - 1\right) \text{ si } a_l = 2 \tag{5}$$

Puisque 7 est premier, on a toujours

$$7 \text{ divise } 3\times 10^l - 1$$

ou bien, ce qui revient au même

$$3\times 10^l = 3^{l+1} = 1 \ (7)$$

Puisque l'ordre de 3 dans U_7 est 6, on en déduit que

$$l = 6q - 1 \text{ avec } q \geq 1$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{l-1} a_k 10^k = a_l \frac{3\times 10^{6q-1} - 1}{7}$ et $n = a_l\left(10^{6q-1} + \dfrac{3\times 10^{6q-1} - 1}{7}\right)$

$$\text{Les seules solutions sont les } \left(\frac{10^{6q}-1}{7}\right)_{q\geq 1} \text{ et les } \left(2\times\frac{10^{6q}-1}{7}\right)_{q\geq 1}$$

Les deux plus petites solutions sont alors

$$\frac{10^6 - 1}{7} = 142\,857$$

$$2\frac{10^6 - 1}{7} = 285\,714$$

Pour $q = 2$, on trouve

$$\frac{10^{12} - 1}{7} = 142\,857\,142\,857$$

$$2\frac{10^{12} - 1}{7} = 285\,714\,285\,714$$

2.3 Le nombre magique

Dans les oeuvres de Lewis Carroll (cf [1]), on trouve (page 422) dans la rubrique "Jeux, casse-tête, inventions" le texte suivant :

Un nombre magique

142 857	
285 714	*soit deux fois ce nombre*
428 571	*soit trois fois ce nombre*
571 428	*soit quatre fois ce nombre*
714 285	*soit cinq fois ce nombre*
857 142	*soit six fois ce nombre*

Commencez au " 1 " de chaque ligne et vous trouverez la même succession de chiffres que dans le nombre magique, et cela jusqu'à six fois ce nombre, tandis que sept fois ce nombre donne une rangée de 9 (999 999).

3 Le second problème (approche arithmétique)

Avec les mêmes notations que pour le premier problème, on obtient facilement l'équation

$$(10p-1)\left(n-a_l 10^l\right)=a_l\left(10^l-p\right) \tag{6}$$

On constate donc immédiatement que $(10p-1)$ divise $a_l\left(10^l-p\right)$. Le problème est que rien ne permet d'affirmer que $10p-1$ et a_l sont premiers entre eux. C'est le cas si $a_l=1,2,4,5,8$ car $10p-1$ est impair et congru à -1 modulo 5, ou si $10p-1$ n'est divisible ni par 3, ni par 7. En revanche on verra que pour certaines solutions où $a_l=3,6,7,9$ il n'en est rien.

3.1 Solutions pour lesquelles $10p-1$ divise 10^l-p

On cherche, dans un premier temps, les solutions pour lesquelles $10p-1$ divise 10^l-p (c'est toujours le cas si $a_l=1,2,4,5,8$ où si $10p-1$ n'est divisible ni par 3, ni par 7). Il s'agit donc de résoudre l'équation

$$10^l\equiv p\ \ (10p-1)$$

La résolution de cette équation repose sur la proposition suivante qui s'avère fondamentale.

Proposition 11 *Résoudre*

$$10^l\equiv p\ \ (10p-1)$$

est équivalent à résoudre

$$10^{l+1}\equiv 1\ \ (10p-1)$$

Preuve. *En effet* $p\left(10^{l+1}-1\right)=\left(10^l-p\right)+10^l(10p-1)$ *ainsi* $p\left(10^{l+1}-1\right)\equiv\left(10^l-p\right)\ \ (10p-1)$*. Il suffit ensuite de remarquer que* p *et* $10p-1$ *sont premiers entre eux*[2]*.* ∎

Ainsi $l+1$ est un multiple entier de l'ordre l_1 de 10 dans U_{10p-1}. Il suffit donc de déterminer cet ordre. En général, ce n'est pas une chose facile. On aura besoin de l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel[3]. On dispose cependant d'une information (peu utile pour le calcul effectif, mais intéressante néanmoins) : l'ordre cherché est un

[2] En termes savants, puisque $10p\equiv 1\ \ (10p-1)$, 10 et p sont inversibles dans $\mathbb{Z}/_{(10p-1)\mathbb{Z}}$.
Si l'on se place alors dans $U_{10p-1}=\left(\mathbb{Z}/_{(10p-1)\mathbb{Z}}\right)^*$ le sous groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/_{(10p-1)\mathbb{Z}}$, on doit résoudre $10^l=10^{l+1}p=p$ et on peut simplifier par p.

[3] Il existe dans le package numtheory de Maple une commande qui détermine l'ordre d'un élément dans U_n.
Ainsi la ligne de commande suivante nous donne l'ordre de 10 dans U_{259}.

```
>  numtheory[order](10,259);
```

6

L'ordre de 10 est donc égal à 6.

diviseur de $\varphi(10p-1)$.
On a ainsi

$$\begin{aligned} n &= a_l 10^l + a_l \frac{10^l - p}{10p-1} \\ &= a_l \times p \frac{10^{l+1}-1}{10p-1} \\ &= a_l \times p \frac{10^{kl_1}-1}{10p-1} \text{ où } k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Remarque 12 *a_l peut prendre toutes les valeurs comprises entre 1 et 9 car* $9 \times \frac{10^l-p}{10p-1} < 10^l$

Exemple 13 *Avec $p = 4$, on trouve $l_1 = 6$, les solutions sont de la forme*

$$\begin{aligned} n &= a_l \times 102564 && (k=1) \\ n &= a_l \times 102564\,102564 && (k=2) \\ n &= a_l \times 102564\,102564\,102564 && (k=3) \end{aligned}$$

etc.

Conclusion 14 (Provisoire) *Il existe pour tout entier p des solutions. On obtient des solutions en déterminant le plus petit entier l_1 tel que $10p-1$ divise 10^{l_1}. Ces dernières sont alors obtenues avec l'entier*

$$p\frac{10^{l_1}-1}{10p-1}$$

en répétant plusieurs fois ces chiffres puis en multipliant le résultat par a compris entre 1 et 9.

Exercice 15 *Pour $p = 26$ et $p = 19$, déterminer la forme des solutions.*
Calculer ensuite $\frac{702}{27}$ et $\frac{703}{37}$ qu'en pensez-vous ?

Vous avez trouvé qu'avec $p = 26$, on a $l_1 = 6$ et $26 \times \dfrac{10^6-1}{259} = 100\,386$. Pourtant si nos souvenirs sont exacts, une des premières solutions trouvées est 702 qui vérifie $\dfrac{702}{27} = \mathbf{26}$. Il y aurait donc quelque chose de pourri au royaume de l'arithmétique ?

3.2 Solutions pour lesquelles $10p-1$ ne divise pas $10^l - p$

Le problème a déjà été évoqué. Rien ne permet d'affirmer que $10p-1$ divise $10^l - p$. Ce que l'on sait, c'est que $10p-1$ divise $a_l\left(10^l-p\right)$.
Prenons l'exemple de $p = 26$, alors $259 = 7 \times 37$ divise $a_l\left(10^l-26\right)$. Si l'on cherche une solution telle que $a_l = 7$, on en déduit que 37 divise $10^l - 26$ ce qui équivaut à $10^l \equiv 26 \ (37)$. Comme pour la proposition 11, on montre que cela revient à résoudre $10^{l+1} \equiv 1 \ (37)$. Mais l'ordre de 10 dans U_{37} est **3**. Le mystère est levé car $7 \times 26 \times \dfrac{10^3-1}{10 \times 26 - 1} = 702$.
Il nous reste à évoquer tous les cas possibles. Ce genre de phénomène ne peut se produire que si $10p-1$ est divisible par $3, 7$ ou 9. Avant d'examiner ces différents cas, on notera que la proposition 11 se généralise.

Proposition 16 *Si π_p est un diviseur de $10p-1$ alors les solutions de l'équation d'inconnue l*

$$10^l \equiv p \ (\pi_p)$$

sont les entiers l tels que $l+1$ soit un multiple de l'ordre de 10 dans U_{π_p}.

3.2.1 Cas où 7 divise $10p - 1$

Dans ce cas, outre les solutions trouvées précédemment, on obtient de nouvelles solutions de la forme

$$7p\frac{10^{k\times l_7}-1}{10p-1},\ k\in\mathbb{N}^*$$

où l_7 est l'ordre de 10 dans $U_{\frac{10p-1}{7}}$. Comme on le voit sur l'exemple $p = 26$ où $l_1 = 6$ et $l_7 = 3$, l'entier l_7 n'est pas toujours égal à l_1. On récupère donc de nouvelles solutions.

Remarque 17 *L'entier l_7 est toujours un diviseur de l_1, ceci permet de réduire la recherche de l_7. Ainsi toutes les solutions sont de la forme*

$$\begin{aligned} a_l\times p\frac{10^{kl_1}-1}{10p-1},\ a_l &\neq 7,\ k\in\mathbb{N}^* \\ 7p\frac{10^{kl_7}-1}{10p-1},\ k &\in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

3.2.2 Cas où 3 divise $10p - 1$ sans que 9 divise $10p - 1$

Dans ce cas si $a_l = 3$ ou $a_l = 6$, on peut chercher des solutions telles que $\frac{10p-1}{3}$ divise $10^l - 1$.
En appliquant le même raisonnement, on détermine l'ordre l'_1 de 10 dans $U_{\frac{10p-1}{3}}$ et on espère trouver de nouvelles solutions de la forme $3p\frac{10^{l'_1}-1}{10p-1}$ ou de la forme $6p\frac{10^{l'_1}-1}{10p-1}$.

Exercice 18 *Déterminer l_1 et l'_1 pour $p = 4, 7, 13$ et 16*

Il semble que $l'_1 = l_1$ (sinon on l'aurait baptisé l_3). C'est effectivement le cas. En effet

$$10^l \equiv 1\ \left(\frac{10p-1}{3}\right)$$

$$\iff\quad \exists K\in\mathbb{N},\ 10^l - 1 = K\times\left(\frac{10p-1}{3}\right)$$

Puisque 9 divise $10^l - 1$ et pas $10p - 1$,on a 3 divise K. Mais alors

$$10^l - 1 = \frac{K}{3}\times(10p-1) \Longrightarrow 10^l \equiv 1\ (10p-1)$$

les ordres l_1 et l'_1 sont donc les mêmes. Il n'y a pas de nouvelles solutions avec $a_l = 3$.

3.2.3 Cas où 9 divise $10p - 1$

Dans ce cas, suivant le même raisonnement, on distingue deux cas

$a_l = 9$ On détermine l_9 l'ordre de 10 dans $U_{\frac{10p-1}{9}}$, on obtient de nouvelles solutions de la forme

$$9p\frac{10^{k\times l_9}-1}{10p-1},\ k\in\mathbb{N}^*$$

On notera également que l_9 divise l_1.

$a_l = 3$ **ou** $a_l = 6$ On détermine l_3 l'ordre de 10 dans $U_{\frac{10p-1}{3}}$(ordre qui cette fois n'a pas de raison d'être égal à l_1 mais le divise). On obtient de nouvelles solutions de la forme

$$\begin{aligned} 3p\frac{10^{k\times l_3}-1}{10p-1},\ k &\in \mathbb{N}^* \\ 6p\frac{10^{k\times l_3}-1}{10p-1},\ k &\in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

3.3 Conclusion (définitive)

On peut résumer les résultats ainsi
En notant l_a le plus petit entier tel que $10^{l_a} \equiv 1 \ \left(\frac{10p-1}{a}\right)$ lorsque a divise $10p-1$ (i.e l'ordre de 10 dans $U_{\frac{10p-1}{a}}$)

Cas 1 *Si* $10p-1$ *n'est divisible ni par* 9*, ni par* 7*, les solutions sont*

$$n = pa_l \frac{10^{kl_1}-1}{10p-1} \text{ où } k \in \mathbb{N}^*$$

Cas 2 *Si* $10p-1$ *est divisible par* 7*, mais pas par* 9*, les solutions sont*

$$\begin{aligned} n &= pa_l \frac{10^{kl_1}-1}{10p-1} \text{ où } k \in \mathbb{N}^*,\ a_l \neq 7 \\ n &= 7p\frac{10^{kl_7}-1}{10p-1} = p\frac{10^{kl_1}-1}{\frac{10p-1}{7}} \end{aligned}$$

Cas 3 *Si* $10p-1$ *est divisible par* 9*, les solutions sont*

$$\begin{aligned} n &= pa_l \frac{10^{kl_1}-1}{10p-1} \text{ où } k \in \mathbb{N}^*,\ a_l \neq 3,\ a_l \neq 6,\ a_l \neq 9 \\ n &= 3p\frac{10^{kl_3}-1}{10p-1} \\ n &= 6p\frac{10^{kl_3}-1}{10p-1} \\ n &= 9p\frac{10^{kl_9}-1}{10p-1} \end{aligned}$$

Cas 4 *Si* $10p-1$ *est divisible par* 7 *et par* 9*, les solutions sont*

$$\begin{aligned} n &= pa_l \frac{10^{kl_1}-1}{10p-1} \text{ où } k \in \mathbb{N}^*,\ a_l \neq 3,\ a_l \neq 6,\ a_l \neq 9 \\ n &= 3p\frac{10^{kl_3}-1}{10p-1} \\ n &= 6p\frac{10^{kl_3}-1}{10p-1} \\ n &= 7p\frac{10^{kl_7}-1}{10p-1} \\ n &= 9p\frac{10^{kl_9}-1}{10p-1} \end{aligned}$$

Remarque 19 *La plus petite valeur pour* p *qui conduit au cas* 4 *est* $p = 1531$*. On a alors* $l_1 = 486,\ l_3 = 162,\ l_7 = 243$ *et* $l_9 = 54$.

Exercice 20 *Déterminer toutes les solutions pour* $p = 10,\ 100,\ 1000,\ 10^n$

Exercice 21 *Déterminer toutes les solutions pour* $p = 5,\ p = 91$

On trouvera en annexe un programme pour la TI89 (nommé `echange3`) qui détermine la plus petite solution pour une valeur de p donnée commençant par un chiffre donné.

4 Un petit tour de plus

Pour $p=5$, on retrouve un des avatars du *nombre magique* du révérend Dodgson. On sait que ce nombre et ses multiples ont d'autres propiétés. Regardons alors ces propriétés sous forme de fractions :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{142\,857}{142\,857} & = & 1 \\ \dfrac{428\,571}{142\,857} & = & 3 \\ \dfrac{285\,714}{142\,857} & = & 2 \\ & \vdots & \end{array}$$

Est-ce réellement une propriété du *nombre magique* ?
Considérons le cas $p=4$, on obtient $n=102564$ (cf exemple 13). On constate alors que

$$\frac{025641}{025641}=1 \qquad \frac{256410}{025641}=10 \qquad \frac{564102}{025641}=22$$

$$\frac{641025}{025641}=25 \qquad \frac{410256}{025641}=16 \qquad \frac{102564}{025641}=4$$

Les quotients sont tous des entiers, est-ce une coïncidence ? Bien évidemment non, et l'on peut même prédire les quotients successifs.
On a vu que si $n=\overline{a_l a_{l-1}...a_0}$ alors $n_1=\overline{a_{l-1}...a_0 a_l}=10n-a_l\left(10^{l+1}-1\right)$. Si, sur n_1, on transfère le premier chiffre en dernière position, on obtient l'entier $\overline{a_{l-2}...a_0 a_l a_{l-1}}=10n_1-a_{l-1}\left(10^{l+1}-1\right)$
On définit donc la suite récurrente

$$\begin{cases} n_1=10n-a_l\left(10^{l+1}-1\right) \\ \forall k,\ 1\leq k\leq l-1, \quad n_{k+1}=10n_k-a_{l-k}\left(10^{l+1}-1\right) \end{cases}$$

Alors

$$\frac{n_{k+1}}{n_1}=10\frac{n_k}{n_1}-\frac{\left(10^{l+1}-1\right)}{n_1}a_{l-k}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que les solutions au second problème, $\dfrac{n}{n_1}=p$, sont toujours de la forme

$$n=p\times a_l\frac{10^{l+1}-1}{10p-1}$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} n_1 & = & a_l\dfrac{10^{l+1}-1}{10p-1} \\ \dfrac{n_{k+1}}{n_1} & = & 10\dfrac{n_k}{n_1}-\dfrac{\left(10^{l+1}-1\right)}{a_l\dfrac{10^{l+1}-1}{10p-1}}a_{l-k} \\ & = & 10\dfrac{n_k}{n_1}-\dfrac{(10p-1)}{a_l}a_{l-k} \end{array}$$

Ainsi les quotients successifs sont toujours entiers si $\dfrac{10p-1}{a_l}$ est un entier (ce qui est toujours le cas pour $a_l=1$, i.e. les solutions commençant par un 1). De plus les quotients successifs $q_k=\dfrac{n_k}{n_1}$ vérifient la récurrence

$$\begin{array}{rcl} q_1 & = & p \\ q_{k+1} & = & 10q_k-\dfrac{(10p-1)}{a_l}a_{l-k} \end{array}$$

Exemple 22 *Avec $p = 26$, $10p - 1 = 259 = 7 \times 37$. La plus petite solution qui commence par 1 est $n = 100\,386$. On a alors*

$$\begin{array}{lcrlll}
\dfrac{100386}{003861} & = & 26 & & & \\[2ex]
\dfrac{003861}{003861} & = & \mathbf{1} & = 10 \times 26 & -259 \times & \boxed{\mathbf{1}} \\[2ex]
\dfrac{038610}{003861} & = & 1\mathbf{0} & = 10 \times 1 & -259 \times & \boxed{\mathbf{0}} \\[2ex]
\dfrac{386100}{003861} & = & 10\mathbf{0} & = 10 \times 10 & -259 \times & \boxed{\mathbf{0}} \\[2ex]
\dfrac{861003}{003861} & = & 22\mathbf{3} & = 10 \times 100 & -259 \times & \boxed{\mathbf{3}} \\[2ex]
\dfrac{610038}{003861} & = & 15\mathbf{8} & = 10 \times 223 & -259 \times & \boxed{\mathbf{8}} \\[2ex]
\dfrac{100386}{003861} & = & 2\mathbf{6} & = 10 \times 158 & -259 \times & \boxed{\mathbf{6}}
\end{array}$$

On dispose aussi de la solution $n = 702$ qui commence par 7 (7 divise $259 = 10p - 1$). Cette solution donne

$$\begin{array}{lllll}
\dfrac{702}{27} & = 26 & & & \\[2ex]
\dfrac{027}{27} & = 1 & = 10 \times 26 & -\dfrac{259}{7} \times & \boxed{\mathbf{7}} \\[2ex]
\dfrac{270}{27} & = 10 & = 10 \times 1 & -\dfrac{259}{7} \times & \boxed{\mathbf{0}} \\[2ex]
\dfrac{702}{27} & = 26 & = 10 \times 10 & -\dfrac{259}{7} \times & \boxed{\mathbf{2}}
\end{array}$$

Exercice 23 *Dans le cas où $a_l = 1$, on retrouve l'entier n en considérant le dernier chiffre des quotients successifs. Démontrez cette propriété.*

Remarque 24 *Si l'on somme les différents quotients obtenus, on obtient (sommer les deux premières colonnes du tableau)*

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\dfrac{10^{l+1} - 1}{9} \times \displaystyle\sum_{k=0}^{l} a_k}{n_1} = \frac{\dfrac{10^{l+1} - 1}{9}}{a_l \dfrac{10^{l+1} - 1}{10p - 1}} \sum_{k=0}^{l} a_k \\
&= \frac{(10p - 1)}{9a_l} \sum_{k=0}^{l} ak
\end{aligned}$$

En particulier si 9 est premier avec l'entier $\dfrac{10p - 1}{a_l}$, on en déduit que la somme des chiffres de n est divisible par 9 (résultat que l'on retrouve facilement car $\dfrac{10p - 1}{a_l} \times n_1 = 10^{l+1} - 1$ est divisible par 9).

5 Recherche à la main de la solution commençant par un 1

On peut facilement rechercher à la main la solution au problème 2 pour le rapport p si on impose au premier chiffre d'être égal à 1.

Il suffit de déterminer ses chiffres un par un. On cherche en effet un entier n tel que le rapport $\dfrac{n}{n_1}$ soit égal à p et n commence par un 1. On pose donc la multiplication de p par n_1, où n_1 se termine par un 1.
Par exemple, pour $p = 4$ on pose la multiplication :

$$\begin{array}{c|cccc|l}
n_1 & & ? & \ldots\ ? & 1 & \\
 & \times & & & 4 & \\ \cline{2-5}
n & = & & & \mathbf{4} & \longleftarrow \text{ Le deuxième chiffre de } n_1 \text{ en partant de la droite est donc un 4}
\end{array}$$

On sait que $4n_1 = n$ donc le dernier chiffre de n est l'avant dernier chiffre de n_1. On récupère ainsi les chiffres de proche en proche.

$$\begin{array}{|cccc|l}
 & & \mathbf{1} & & \longleftarrow \text{ le 1 correspond à la retenue} \\
 & & 4 & 1 & \\
\times & & & 4 & \\ \hline
= & & \mathbf{6} & 4 & \longleftarrow \text{ Le troisième chiffre de } n_1 \text{ en partantde la droite est donc un 6}
\end{array}$$

$$\begin{array}{|ccccc|}
 & 2 & 1 & & \\
 & & 6 & 4 & 1 \\
\times & & & & 4 \\ \hline
= & & 5 & 6 & 4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|cccccc|}
 & 2 & 2 & 1 & & \\
 & & 5 & 6 & 4 & 1 \\
\times & & & & & 4 \\ \hline
= & & 2 & 5 & 6 & 4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|ccccccc|}
 & 1 & 2 & 2 & 1 & & \\
 & 0 & 2 & 5 & 6 & 4 & 1 \\
\times & & & & & & 4 \\ \hline
= & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{4}
\end{array}$$

On continue ce processus jusqu'au moment où l'on retombe sur un 1 et qu'il n'y a plus de retenue. Ainsi pour $p = 4$, la solution la plus petite qui commence par un 1 est 102564.

Exercice 25 *Faire ces opérations pour* $p = 19$.

Lorsque $10p - 1$ est divisible par $3, 7$ ou 9 on peut rechercher la solution minimale qui commence par $3, 7$ ou 9. Par exemple, avec $p = 19$, on a $10p - 1 = 7 \times 27$.

$$\begin{array}{|cccc|}
\text{retenue} & & 6 & \\
 & & & 7 \\
 & \times & 1 & 9 \\ \hline
 & & & 3 \\
 & & 7 & \\ \hline
 & = & & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|cccc|}
 & 3 & 6 & \\
 & & 3 & 7 \\
\times & & 1 & 9 \\ \hline
 & & 3 & 3 \\
 & 3 & 7 & \\ \hline
= & & 0 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|cccc|}
 & 3 & 6 & \\
 & 0 & 3 & 7 \\
\times & & 1 & 9 \\ \hline
 & 3 & 3 & 3 \\
 & 3 & 7 & \\ \hline
= & 7 & 0 & 3
\end{array}$$

On continue cette fois ce jusqu'à ce que l'on retrouve un 7 sans retenue. Ainsi la solution la plus petite, pour $p = 19$, qui commence par un 7 est 703.

Exercice 26 *Faire ces opérations pour* $p = 26$ *et le premier chiffre est* 7.

6 Ecriture décimale de l'inverse d'un entier, résolution analytique des deux problèmes.

Le nombre magique de Lewis Carroll vous est sans doute déjà connu. En effet, si on calcule le développement décimal de $\dfrac{1}{7}$, on obtient

$$\frac{1}{7} = 0,142857\,142857\cdots$$

On va maintenant examiner en détail cette propriété.

6.1 Entier d'inverse périodique dès la virgule

Soit $q \in \mathbb{N}$, considérons l'écriture décimale de $\dfrac{1}{q}$. Cette écriture est nécessairement périodique, si

$$\frac{1}{q} = 0, \overline{\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_i\, a_l a_{l-1} \cdots a_0\, a_l a_{l-1} \cdots a_0 \cdots a_l \ldots} \text{ avec } \alpha_i \neq a_0$$

on notera

$$\frac{1}{q} = 0, \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_i\, [a_l a_{l-1} \cdots a_0]$$

l'entier $n = \overline{a_l a_{l-1} \cdots a_0}$ est la partie périodique de $\dfrac{1}{q}$.

Exercice 27 *Exprimer* $0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_i\, [a_l \cdots a_0]$ *sous forme de fraction à l'aide des deux entiers* $n = \overline{a_l a_{l-1} \cdots a_0}$ *et* $m = \overline{\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_i}$

Lorsque dans le développement de $\dfrac{1}{q}$, la période apparaît dès la virgule (i.e si $i = 0$), on dit que q est d'inverse périodique dès la virgule.

Exercice 28 *Caractériser les entiers d'inverse périodique dès la virgule (quel facteurs premiers ne doivent-ils pas contenir ?)*

La remarque fondamentale est que si $n = \overline{a_l a_{l-1} \ldots a_0} \in \mathbb{N}$, le rationnel $0, [n] = 0, [a_l a_{l-1} \ldots a_0]$ est égal à

$$0, [n] = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{10^{k\times(l+1)}} = \frac{n}{10^{l+1} - 1}$$

Ce résultat peut s'obtenir facilement comme limite d'une suite géométrique. A partir de cela, on peut retrouver les solutions aux deux problèmes.

6.2 Le premier problème

Reprenons l'équation (1) , elle s'écrit

$$(10 - p)\, n = a_l \left(10^{l+1} - 1\right)$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \frac{a_l}{10 - p} &= \frac{n}{10^{l+1} - 1} \\ &= 0, [a_l a_{l-1} \ldots a_0] \end{aligned}$$

On détermine ainsi les solutions du problème 1 en considérant les développements décimaux de $\dfrac{a_l}{10 - p}$ pour $2 \leq p \leq 9$ et $1 \leq a_l < 9$. Si ce développement est périodique dès la virgule, et commence par a_l alors la partie périodique est solution au problème 1.
Puisque $\dfrac{a_l}{10 - p} < 1$, on doit prendre $a_l < 10 - p$ (ce qui exclut $p = 9$).
La condition de périodicité permet d'exclure les cas $p = 2, 5, 6, 8$ qui donnent $\dfrac{1}{10 - p}$ décimal.
Il ne reste plus que $p = 3, 4, 7$. Pour $p = 4$, $\frac{1}{10-p} = \frac{1}{6}$ n'est pas périodique dès la virgule. Enfin pour $p = 7$, on a $\dfrac{1}{10 - p} = 0,3333\cdots$ est bien périodique mais $\dfrac{a_l}{10 - p}$ a une période qui ne commence pas par a_l (mais par $3a_l$).

Reste donc $p = 3$, alors $1 \leq a_l < 7$, on a alors

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{1}}{7} &= 0,\mathbf{1}42857\,142857\cdots \text{ est à retenir} \\
\frac{\mathbf{2}}{7} &= 0,\mathbf{2}85714\,285714\cdots \text{ est à retenir} \\
\frac{\mathbf{3}}{7} &= 0,\mathbf{4}28571\,428571\cdots \text{ est à exclure car la période ne commence pas par } \mathbf{3} \\
\frac{\mathbf{4}}{7} &= 0,\mathbf{5}71428\,571428\cdots \text{ est à exclure} \\
\frac{\mathbf{5}}{7} &= 0,\mathbf{7}14285714285\cdots \text{ est à exclure} \\
\frac{\mathbf{6}}{7} &= 0,\mathbf{8}57142857142\cdots \text{ est à exclure}
\end{aligned}$$

On retrouve bien les solutions et leur structure.

6.3 Le second problème

On peut traiter le second problème de la même manière. En effet l'égalité (6) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{pa_l}{(10p-1)} &= \frac{n}{10^{1+l}-1} \\
\frac{pa_l}{(10p-1)} &= 0,[a_l a_{l-1}\cdots a_0]
\end{aligned}$$

On remarque que si l'on effectue la division de pa_l par $10p-1$, on obtient bien $0, a_l\cdots$ (car $\frac{pa_l}{(10p-1)} = \frac{a_l}{10} + \frac{a_l}{10(10p-1)}$).
En conséquence, pour tout p, on obtient les solutions au problème 2 pour un rapport $\dfrac{n}{n_1} = p$ en prenant la partie périodique du développement décimal de $\dfrac{pa_l}{(10p-1)}$ pour $1 \leq a_l \leq 9$.
Le développement de $\dfrac{pa_l}{(10p-1)}$ est bien périodique dès la virgule car $10p-1$ est premier avec 10. De plus pour certaines valeurs de a_l la fraction est parfois simplifiable. On retrouve donc la discussion faite avec l'approche arithmétique.

En analysant les différents résultats obtenus par l'approche arithmétique, on peut énoncer les résultats suivants :

Théorème 29 *Soit q un entier d'inverse périodique dès la virgule et soit n_1 la partie périodique du développement décimal de $\dfrac{1}{q}$. Si n est obtenu en transférant le dernier chiffre de n_1 en première position alors $\dfrac{n}{n_1}$ est un entier p. Cet entier est égal à $\frac{9p+1}{10}, \frac{3p+1}{10}, \frac{7p+1}{10}$ ou $\frac{p+1}{10}$ suivant que le dernier chiffre de q est $1, 3, 7$ ou 9 respectivement[4].*

De plus en effectuant une permutation circulaire sur les chiffres de n_1, on obtient toujours un multiple de n_1. Les différents rapports obtenus peuvent facilement se calculer à l'aide des chiffres de n_1 et de l'entier p.

Quand à la remarque (24), elle conduit au

Théorème 30 *Soit q un entier d'inverse périodique dès la virgule et non divisible par 3, alors la somme des chiffres de la partie périodique du développement décimal de $\dfrac{1}{q}$ est divisible par 9.*

Remarque 31 *Avec le logiciel Maple, on peut utiliser la procédure pdexpand du package numtheory. Cette procédure donne immédiatement le développement périodique.*
Par exemple avec $p = 4$, on obtient

[4] L'entier p est tel que $q = \dfrac{10p-1}{a_l}$ où $1 \leq a_l \leq 9$.

```
> with(numtheory):
Warning, new definition for order
> pdexpand(4*1/39);
```

$$\mathrm{PDEXPAND}(1, 0, [], [1, 0, 2, 5, 6, 4])$$

```
> pdexpand(4*2/39);
```

$$\mathrm{PDEXPAND}(1, 0, [], [2, 0, 5, 1, 2, 8])$$

On peut alors créer une procédure qui admet pour paramètres d'entrées l'entier p *et le premier chiffre* a_l *et renvoie la plus petite solution au problème* 2 *pour le rapport* p *et commençant par* a_l.

```
> problem2:=proc(p,al)
local dev,chiffsol,i,nbchiff;
dev:=numtheory[pdexpand](p*al/(10*p-1));
chiffsol:=op(4,dev);
nbchiff:=nops(chiffsol);
add(chiffsol[i]*10^(nbchiff-i),i=1..nbchiff);
end:
> problem2(19,1);
```

$$100529$$

```
> problem2(19,7);
```

$$703$$

```
> problem2(19,9);
```

$$904761$$

Le lecteur intéressé par les propriétés des développements décimaux pourra consulter [2] et [3]. Il trouvera dans le dernier ouvrage cité une démonstration du petit théorème de Fermat comme application.

Annexe A

Programmes

Les programmes suivant permettent une recherche expérimentale des solutionsEchange1 détermine les solutions au problème 1 comprises entre les entrées d et a

Echange 1 détermine les solutions au problème 1 comprises entre les entrées d et a

TI 89	TI 83

Echange1()
Prgm
Local d, e, i, j, p, k
Prompt d, a
For i, d, a, 1
iPart(log(i)) ⟶ k
10 ∗ i − p ∗ (10^(k + 1) − 1)j
If mod(j, i) = 0 Then
Disp i
End If
End For
EndPrgm
	Prompt D,A
	For(I,D,A,1)
	iPart(log((I))→K
	iPart(I/10^K)→P
	10∗I-P∗(10^(K+1)-1)→J
	If J-I∗iPart(J/I)=0
	Then
	Disp I
	End
	End

Echange2 détermine les solutions au problème 2 comprises entre les entrées d et a

TI 89	TI 83

Echange2()
Prgm
Local d, e, i, j, p, k
Prompt d, a
For i, d, a, 1
iPart(log(i)) ⟶ k
iPart(i/10^k) ⟶ p
10 ∗ i − p ∗ (10^(k + 1) − 1) ⟶ j
If mod(j, i) = 0 and i ≠ j Then
Disp i, i/j
EndIf
EndFor
EndPrgm
	Prompt D,A
	For(I,D,A,1)
	iPart(log((I))→K
	iPart(I/10^K)→P
	10∗I-P∗(10^(K+1)-1)→J
	If I-J∗iPart(I/J)=0 and I≠J
	Then
	Disp I,I/J
	End
	End

Exposant détermine l'ordre de 10 dans $U_{\frac{10p-1}{a}}$

TI 89	TI 83
exposant(p, a) Func Local e 1→e While fPart(a*(10^e-1)/(10*p-1))≠ 0 e+1→e EndWhile e EndFunc	Prompt P,A 1→E While fPart(A*(10^E-1)/(10P-1))≠0 E+1→E End

Echange 3 détermine la plus petite solution commençant par a pour p donné

TI 89	TI 83
echange3(p, a) Func Local e exposant(p,a)→e a*p*(10^e-1)/(10*p-1) EndFunc	prgmEXPOSANT Disp A*P*(10^E-1)/(10*P-1)

Annexe B

Quelques amusettes mathématiques autour du nombre magique

142857 et les puissances de 2

Considérons les puissances de 2 que l'on multiplie par 7. On construit avec ces dernières le tableau suivant :

7×2^1	14					
7×2^2		28				
7×2^3			56			
7×2^4			1	12		
7×2^5				2	24	
7×2^6					4	48
	14	**28**	**57**	14	28	48

Exercice 32 *Expliquez le phénomène observé*

Un tour de magie

Faire choisir un entier à 4 chiffres à un élève (par exemple 7523)
Lui ajouter 142857 (donne $7523 + 142857 = 150\,380$)
Multiplier par 7 ($7 \times 150\,380 = 1052\,660$)
Barrer le chiffre de gauche (il reste 052 660)
Multiplier par 143 ($143 \times 052\,660 = 7530\,380$)
faire annoncer le nombre obtenu
On lui ajoute 143 ($7530\,380 + 143 = 7530\,523$)
Le nombre de départ est **75 23** (**75** 305 **23**)

Exercice 33 *Expliquez le phénomène observé, doit-on partir d'un nombre à 4 chiffres ?*

Somme des parties du nombre magique

Le nombre 142857 a **6** chiffres, si l'on additionne les deux parties à trois chiffres, on obtient

$$142 + 857 = 999 = 10^3 - 1 = 10^{\frac{6}{2}} - 1$$

Est-ce réellement une propriété du nombre magique ?

Exercice 34 *Soit p un entier premier avec 10, on note d l'ordre de 10 dans U_p. Soit n un entier, $0 < n < p$.*

1. *Montrer que le développement décimal de $\frac{n}{p}$ est périodique de période d*
2. *Montrer que si d est pair, alors la partie périodique du développement se décompose en deux entiers de $\frac{d}{2}$ chiffres dont la somme est $10^{\frac{d}{2}} - 1$.*
   Par exemple, $\dfrac{1}{13} = 0.076923\,076923...$, 076923 *se décompose en* $076 + 923 = 999$.

Remarque 35 *On pourra consulter le site de Gérard Villemin (en particulier sur le chiffre 7)*

`http://villemin.gerard.free.fr/` et `http://perso.wanadoo.fr/yoda.guillaume/SeptP1.htm`

Solution 36 (Que dire de 1729 ?) *L'entier 1729 a (au moins) deux propriétés intéressantes :*

1. 1729 *est le plus petit entier qui s'écrive de deux manières différentes comme la somme de deux cubes .*

$$\begin{aligned} 1729 &= 1^3 + 12^3 \\ &= 9^3 + 10^3 \end{aligned}$$

2. 1729 *est le troisième nombre de* Carmichael*. Pour mémoire, n est dit de* Carmichael *si pour tout entier a premier avec n, on $a^{n-1} = 1 \ (n)$.*

Références

[1] LEWIS CARROLL, *Œuvres*, Robert Laffont, collection BOUQUINS

[2] JEAN-PAUL DELAHAYE, *Jeux Mathématiques et mathématiques des jeux*, Bibliothèque POUR LA SCIENCE

[3] JOHN H.CONWAY, RICHARD K.GUY, *The book of Numbers*, Springer Verlag (Traduction française aux éditions Eyrolles)

[4] LA RECHERCHE, numéro spécial *Les nombres,* Juillet/Août 1995