Quelques exercices originaux d'arithmétique.

G.Huvent

26 juillet 2004

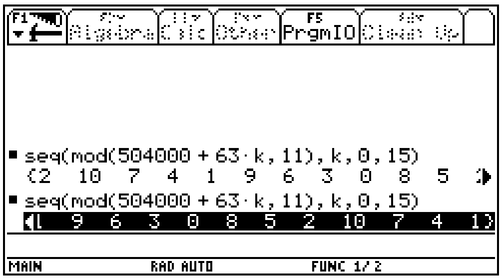
Pour tous les exercices, on suppose disposer d'une calculatrice réalisant la recherche du pgcd, des couples de Bézout et donnant la factorisation en nombres premiers d'un entier.

1 Avec la calculette

Exercice 1 (Olympiades Hong-Kong 1999)

Soit a un nombre de trois chiffres. Le nombre de 6 chiffres obtenu en plaçant derrière 504 les trois chiffres de a est divisible par $7, 9$ et 11. Trouver a

Solution. *On sait que $504000 + a$ est divisible par $7, 9$ et 11. Puisque 7 et 9 divise $504 = 2^3 3^2 7$, et que $7 \curlywedge 9 = 1$, on peut affirmer que $7 \times 9 = 63$ divise a.*
Avec la calculette, on examine les restes des nombres de la forme $504000 + 63k$ où k est compris entre 0 et 15 (car $63 \times 16 = 1008$ et $63 \times 15 = 945$)



On constate que $k = 8$ est la seule valeur possible. En conclusion

$$a = 63 \times 8 = 504$$

2 Nombres premiers

Exercice 2 (Olympiades Hong-Kong 1998)

Soit c un nombre premier tel que $11c + 1$ soit le carré d'un entier. Déterminer c.

Solution. *On suppose que* $11c+1=a^2 \Longleftrightarrow 11c=(a-1)(a+1)$. *Puisque* 11 *est premier on peut affirmer que* 11 *divise* $a-1$ *ou bien* 11 *divise* $a+1$.
1er cas : *Si* 11 *divise* $a-1$ *alors* $a=1+11k$ *où* $k\in\mathbb{N}$. *Mais alors*

$$\begin{aligned} 11c &= (a-1)(a+1) \Longrightarrow 11c = 11k(2+11k) \\ &\Longrightarrow c = k(2+11k) \end{aligned}$$

On en déduit que k *divise* c, *puisque* c *est premier on a* $k=1$ *ou* $k=c$.
Si $k=1 \Longrightarrow c=13$ *qui convient* $(11\times 13+1=144=12^2)$
Si $k=c$ *alors* $c=c(2+11c) \Longrightarrow 2+11c=1$ *impossible*
2ième cas : *Si* 11 *divise* $a+1$, *on obtient alors*

$$11c=(a-1)(a+1) \Longrightarrow c=k(11k-2)$$

Si $k=1$ *alors* $c=9$ *qui n'est pas premier (pourtant* $11\times 9+1=100=10^2$*)*
Si $k=c$ *alors* $1=11c-2$ *impossible.*
La seule solution est donc

$$c=13$$

Exercice 3 (Olympiades Hong-Kong 1998)

Le nombre 191 *peut s'écrire comme différence des carrés de* a *et* b. *Quelle est la valeur maximale pour* a *?*

Solution. *On écrit* $191=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. *Puisque* 191 *est premier, on a*
1er cas : 191 *divise* $a-b \Longrightarrow b=a-191k$ *où* $k\in\mathbb{Z}$. *On remplace pour obtenir*

$$191=191k(2a-191k) \Longrightarrow k(2a-191k)=1$$

on en déduit que k *divise* 1 *donc* $k=1$ *ou* $k=-1$. *Si* $k=1$ *on obtient* $2a=192 \Longrightarrow a=96$. *Si* $k=-1$, *on obtient* $a=-95$.
2ième cas : 191 *divise* $a+b \Longrightarrow b=191k-a$, *où* $k\in\mathbb{Z}$. *On obtient alors*

$$1=k(2a-191k)$$

on retrouve les mêmes solutions (ce qui est normal car si (a,b) *est solution alors* $(a,-b)$ *aussi. On se ramène au cas précédent en remplaçant* b *par* $-b$*)*
Conclusion

$$a=96$$

Exercice 4 (Olympiades Hong-Kong 1999)

Trouver le plus grand entier naturel n *tel que les restes de la division euclidienne de* $81849, 106392$ *et* 124374 *soient égaux.*

Solution. *Les conditions s'écrivent*

$$\begin{aligned} 81849 &= n \times q_1 + r & (1)\\ 106392 &= n \times q_2 + r & (2)\\ 124374 &= n \times q_3 + r & (3)\end{aligned}$$

On combine ces équations

$$\begin{aligned} (2)-(1) &: \quad 24543 = n\left(q_2 - q_1\right)\\ (3)-(1) &: \quad 42525 = n\left(q_3 - q_1\right)\\ (3)-(2) &: \quad 17982 = n\left(q_3 - q_2\right)\end{aligned}$$

Soit p un facteur premier de n et α son exposant dans la décomposition de n. On sait que p^α divise n donc aussi 24543, 42525 *et* 17982. *Il divise donc également* $24543 \curlywedge 42525 = 3^5$ $(17982 = 2 \times 3^5 \times 37)$. *Ainsi $n = 3^p$ avec $p \leq 5$. On vérifie ensuite que*

$$\begin{aligned} 81849 &= 336 \times 3^5 + 201\\ 106392 &= 437 \times 3^5 + 201\\ 124374 &= 511 \times 3^5 + 201\end{aligned}$$

3 Algorithme d'Euclide, pgcd, ppcm

Exercice 5 (Une formule pour calculer le pgcd)

Soient a et b deux entiers positifs, montrer que

$$a \curlywedge b = a + b - ab + 2\sum_{k=1}^{b-1} E\left(k\frac{a}{b}\right)$$

Cette formule a été trouvée par Marcelo Polezzi en 1997.

Solution. *Posons $d = a \curlywedge b$, $a = da'$ et $b = db'$, alors a', b' sont des entiers positifs premiers entre eux. Lorsque k décrit $\{0, \cdots, m-1\}$, $k\frac{a}{b} = k\frac{a'}{b'}$ est un entier si et seulement si b' divise k. Ceci se produit exactement $E\left(\frac{b-1}{b'}\right) = E\left(d - \frac{1}{b'}\right) = d - 1$ fois.*
Or

$$E\left(k\frac{a}{b}\right) + E\left(a - k\frac{a}{b}\right) = \left\{\begin{array}{r} a - 1 si\ k\frac{a}{b} \notin \mathbb{N}\\ a\ si\ k\frac{a}{b} \in \mathbb{N}\end{array}\right.$$

ainsi

$$\sum_{k=1}^{b-1}\left(E\left(k\frac{a}{b}\right) + E\left(a - k\frac{a}{b}\right)\right) = (a-1)(b-1) + (d-1) = ab - a - b - d$$

Pour conclure, on a

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{b-1} E\left(k\frac{a}{b}\right) &= \sum_{k=1}^{b-1} E\left(k\frac{a}{b}\right) + \sum_{k=1}^{b-1} E\left((b-k)\frac{a}{b}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{b-1} E\left(k\frac{a}{b}\right) + \sum_{k=1}^{b-1} E\left(a-k\frac{a}{b}\right) \\ &= ab-a-b-d \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 6

Montrer que les fractions

$$\frac{12n+1}{30n+2} \text{ et } \frac{21n+4}{14n+3}$$

sont irréductibles

Solution. *On s'inspire d'Euclide. Soit* $a = 30n+2$ *et* $b = 12n+1$. *Alors*

$$\begin{aligned} a \curlywedge b &= (a-2b) \curlywedge b \\ &= 6n \curlywedge b \\ &= 6n \curlywedge (b - 2\times 6n) \\ &= 6n \curlywedge 1 = 1 \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} (21n+4) \curlywedge (14n+3) &= (7n+1) \curlywedge (14n+3) \\ &= (7n+1) \curlywedge 1 = 1 \end{aligned}$$

---

4 Reste des divisions

Exercice 7

On divise 2003 *par* n *, le reste est égal à* 8. *On divise alors* 3002 *par* n, *le reste obtenu est* 27. *Que vaut* n *?*

Solution. *On a*

$$\left\{\begin{array}{l} 2003 = an+8 \\ 3002 = bn+27 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 1995 = an \\ 2975 = bn \end{array}\right.$$

Ainsi n *divise* 1995 *et* 2975 *donc divise aussi* $1995 \curlywedge 2975 = 35$. *Comme les restes doivent être inférieurs à* n, *on en déduit que* $n \geq 28$ *et donc que* $n = 35$.

Exercice 8 (Olympiades Hong-Kong 2001)

L'entier n a 6 chiffres et s'écrit $n = x1527y$. On sait que n est un multiple de 4 et que si on le divise par 11, le reste est égal à 5. Trouver n.

Solution. *On a $n = 100000x + 15270 + y$. On regarde modulo 4, on obtient alors*

$$n = 2 + y \ \ (4)$$

Puisque n est multiple de 4 et que $0 \leq y \leq 9$, on en déduit que $y = 2$ ou $y = 6$.
On regarde alors modulo 11, on obtient

$$n = 10x + 2 + y = 5 \ \ (11)$$

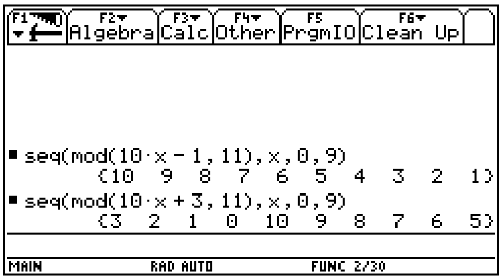
Pour $y = 2$ il vient

$$10x - 1 = 0 \ \ (11)$$

Avec $0 \leq x \leq 9$, il n'y a aucune solution (on peut le prouver en utilisant une calculatrice (cf écran), ou bien en multipliant par 10, ce qui donne $100x = 10 \ \ (11) \Longrightarrow x = 10 \ \ (11)$ car $100 = 1 \ \ (11)$. On a utilisé le fait que 10 est inversible dans $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$)
Pour $y = 4$ il vient

$$10x + 3 = 0 \ \ (11)$$

Avec $0 \leq x \leq 9$, il vient $x = 3$, unique solution (idem on utilise la calculatrice ou bien $10x = -3 = 8 \ \ (11) \Longrightarrow 100x = 80 = 3 \ \ (11) \Longrightarrow x = 3 \ \ (11)$)



En conclusion

$$n = 315276$$

5 Bézout

Exercice 9

n est un entier à 6 chiffres tel que lorsque l'on échange les trois premiers chiffres avec les trois derniers, le résultat obtenu est $6n + 21$. Trouver n.

Solution. *Ecrivons* $n = 1000A + B$ *avec* A *et* B *ayant* 3 *chiffres. Par hypothèse,*

$$1000B + A = 6\left(1000A + B\right) + C \iff 994B - 5999A = C$$

Puisque $(994, 5999) = 7$, *on doit résoudre* $142B - 857A = 3$.
On cherche par division euclidienne un couple de Bézout pour $(142, 857)$ *et l'on trouve* $57 \times 857 - 344 \times 142 = 1$.
On a alors $142\left(B + 3 \times 344\right) - 857\left(A - 3 \times 57\right) = 0$ *donc* $B = -1032 + 857k$ *et* $A = 142k - 171$. *On sait que* A *et* B *ont trois chiffres, on trouve alors* $k = 2$ *comme unique solution et* $n = 113682$

Exercice 10

L'entier n *a* 4 *chiffres et s'écrit* $n = a4b4$, *si on échange* a *et* b *on obtient l'entier* p.
Sachant que le reste de la division de p *par* n *est égal à* 2, *trouver* n .

Solution. *On a* $n = 1000a + 10b + 404$,
On sait qu'il existe q *tel que* $p = nq + 2$

$$\begin{aligned} q \times n + 2 - b4a4 &= q \times (1000a + 10b + 404) + 2 - 1000b + 10a + 404 \\ &= 10\left(100q - 1\right)a + 10\left(q - 100\right)b + 2\left(202q - 201\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il faut donc que 10 *divise* $2\left(202q - 201\right)$, *i.e.* 5 *divise* $202q - 201$. *Modulo* 5, *on a* $202c - 201 = 2q - 1\ (5)$, *c est compris entre* 1 *et* 9, $2 \times 1 - 1 = 1$, $2 \times 2 - 1 = 3, 2 \times 3 - 1 = 5$, $2 \times 4 - 1 = 7$, $2 \times 5 - 1 = 9$, $2 \times 6 - 1 = 11$, $2 \times 7 - 1 = 13$, $2 \times 8 - 1 = 17$ *et enfin* $2 \times 9 - 1 = 17$. *La seule possibilité est* $q = 3$ (*on peut aussi écrire que* $2q - 1 = 5k \iff 2q - 5k = 1$ *et se ramener à Bézout)*
On obtient avec $q = 3$,

$$2990a - 970b = -810 \iff 97b - 299a = 81$$

On résout par Euclide

$$a = 2 + 97k, b = 7 + 299k$$

La seule solution est alors

$$n = 2474$$

Exercice 11

Demandez à un élève de multiplier le jour et le mois de sa date d'anniversaire par 31 *et* 12 *respectivement puis d'ajouter les deux produits. Il vous donne le résultat et, oh miracle, vous lui donnez sa date d'anniversaire. Expliquez et donnez ma date d'anniversaire si le résultat que j'ai trouvé est* 308.

Solution. *Il s'agit de résoudre* $31j + 12m = x$ *où* x *est donné. Puisque* $31 \curlywedge 12 = 1$, *avec Bézout, on a*

$$7 \times 31 - 18 \times 12 = 1$$

On a alors

$$(7x)\times 31-(18x)\times 12=x$$

Par soustraction

$$\begin{aligned}31\times(j-7x)+12\times(m+18x) &= 0\\ 31\curlywedge 12 &= 1\end{aligned}$$

donc $(m+18x)=31k$ *et* $(j-7x)=-12k$

$$\begin{aligned}m &= 31k-18x\\ j &= 7x-12k\end{aligned}$$

La donnée est 'l'entier x *compris entre* $31+12=43$ *et* $31^2+12^2=1105$*, les inconnues sont* m *et* j *tels que* $1\leq m\leq 12$ *et* $1\leq j\leq 31$*. Ainsi*

$$\begin{aligned}1 &\leq 31k-18x\leq 12\Longleftrightarrow \frac{1+18x}{31}\leq k\leq\frac{12+18x}{31}\\ 1 &\leq 7x-12k\leq 31\Longleftrightarrow\frac{-31+7x}{12}\leq k\leq\frac{-1+7x}{12}\end{aligned}$$

Mais

$$\frac{12+18x}{31}-\frac{1+18x}{31}=\frac{11}{31}<1$$

Il n'existe donc qu'une seule valeur de k*, qui est* $\frac{1+18x}{31}$ *si* $\frac{1+18x}{31}\in\mathbb{N}$ *et* $E\left(\frac{1+18x}{31}\right)+1$ *sinon.*
En fait, puisque $x=12m+31j$, $\frac{1+18x}{31}=18j+\frac{216m+1}{31}$*, c'est un entier si et seulement si* $216m+1$ *est divisible par* 31*. Avec* $216=6\times 31+30$*, on a* $\frac{1+18x}{31}\in\mathbb{N}$ *si et seulement si* $\frac{30m+1}{31}\in\mathbb{N}$. *, ce qui n'est possible que pour* $m=1$*.*
Par exemple avec $x=308$, $k=E\left(\frac{1+18\times 308}{31}\right)+1=E\left(\frac{5545}{31}\right)+1=179$, $m=31\times 179-18\times 308=5$ *et* $j=7\times 308-12\times 179=8$*.*
Remarque : *Il y a plus simple, en effet* $x=12m\ (31)$ *et pour* $m=1,...,12$*, les 12 restes sont deux à deux distincts et valent* $12,24,5,17,29,10,22,3,15,27,8,20$*. Avec* $x=308$ *on a* $308=310-2=-2+31=29\ (31)$ *d'où* $m=5$*.*

---

6 Congruences

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{N}$ *l'équation*

$$5^n+2^n=4^n+3^n$$

Que pensez-vous de la même équation lorsque l'inconnue est dans $\mathbb{R}_+^*$ *?*

Solution. *Supposons* $n\geq 2$

$$\begin{aligned}5^n+2^n &= 4^n+3^n\Longrightarrow 5^n-4^n=3^n-2^n\\ (5-4)\left(5^{n-1}+5^{n-2}\times 4+\cdots+5\times 4^{n-2}+4^{n-1}\right) &= (3-2)\left(3^{n-1}+3^{n-2}\times 2+3^{n-3}\times 4+\cdots+2^{n-1}\right)\end{aligned}$$

Modulo 4, *on obtient*

$$1 = (-1)^{n-1} + 2 \times (-1)^{n-2} = (-1)^n \ \ (4)$$

Ainsi n est pair, écrivons $n = 2p$ avec $p \geq 1$, on obtient

$$25^p - 16^p = 9^p - 4^p \Longrightarrow (25 - 16) \times (\cdots) = 9^p - 4^p$$

Modulo 9, *il vient*

$$0 = -4^p \ \ (9)$$

ce qui est impossible. Il reste les cas $n = 0$ et $n = 1$ qui sont solutions.
Si l'on considère maintenant l'équation

$$5^x + 2^x = 4^x + 3^x \text{ où } x \in \mathbb{R}_+^*$$

elle est équivalente à

$$5^x - 4^x = 3^x - 2^x$$

Considérons x comme fixé et soit $f(t) = t^x$. On a donc

$$f(5) - f(4) = f(3) - f(2)$$

Le théorème des accroissements finis prouve l'existence de $t_1 \in]4, 5[$ et de $t_2 \in]2, 3[$ tels que

$$(5 - 4) \times x t_1^{x-1} = (3 - 2) \times x t_2^{x-1} \Longrightarrow t_1^{x-1} = t_2^{x-1}$$

cette dernière égalité n'est possible que si $x = 1$ car $t_1 > t_2$.
Les seules solutions sont donc $x = 1$ (et $x = 0$).

7 Ordre

Exercice 13

Montrer que tout entier $n \geq 2$, non pair et non divisible par 5 admet un multiple rep-unit (i.e. composé uniquement de 1)

Solution. *Considérons les entier $a_k = \frac{10^k-1}{9}$, $k \geq 1$, et notons r_k le reste de la division euclidienne de a_k par n. Il existe deux entiers distincts m et p tels que $r_m = r_p$.*
Si $p > m$ alors $a_p - a_m = \frac{10^p-1}{9} - \frac{10^m-1}{9} = 10^m \times \frac{10^{p-m}-1}{9}$ est divisible par n. Or n est premier avec 10 donc avec 10^{p-m}. Ainsi n divise $\frac{10^{p-m}-1}{9}$ qui est bien un rep-unit.
Autre preuve : Dans le groupe ${}^{\mathbb{Z}}/_{9n\mathbb{Z}}$, 10 et $9n$ sont premier entre eux. Ainsi d'après le théorème d'Euler $10^{\phi(9n)} = 1 \equiv (9n) \Rightarrow n$ divise $\frac{10^{\phi(9n)}-1}{9}$ (où $\phi(9n)$ désigne l'indicateur d'Euler de $9n$).
Par exemple, avec $n = 3$, $9n = 27$, $\phi(27) = 18$ et 3 divise $\frac{10^{18}-1}{9}$, $\frac{10^{18}-1}{3\times 9} = 37\,037\,037\,037\,037\,037$. Avec $n = 1999$, l'ordre de 10 est un diviseur de $\phi(1999) = 1998$. On peut vérifier que cette ordre est 999.

8 Autres

Exercice 14 (Un grand classique)

Par combien de zéros se termine $100!$
Plus généralement, montrer que l'exposant du nombre premier p dans la décomposition de $n!$ est donnée par

$$\sum_{k\geq 1} E\left(\frac{n}{p^k}\right)$$

où la somme porte sur les entiers k tels que $p^k \leq n$.
Montrer alors que $\dfrac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!\,(m+n)!}$ *est un entier (Olympiades internationales 1972)*

Solution. *Pour avoir un zéro, il faut avoir un facteur* 10. *Il faut donc chercher les exposants de* 2 *et de* 5 *dans la décomposition de* $100!$ *et prendre le plus petit des deux. (en fait, il est clair que c'est celui de* 5*).*
Pour cela remarquons qu'il y a $\frac{100}{5}$ *multiples de* 5 *qui donnent chacun un facteur* 5.
Puis il y a $\frac{100}{5^2}$ *multiples de* 5^2 *qui donne un nouveau facteur* 5 *(et pas deux, car un multiple de* 25 *est aussi déjà multiple de* 5*).*
puis il y a $E\left(\frac{100}{75}\right)$ *multiple de* 5^3,...
Au total, il y $\frac{100}{5}+\frac{100}{5^2}=24$ *zéros dans* $100! = 93\,326\,215\,443\,944\,152\,681\,699\,238\,856\,266\,700\,490\,715\,968\,264\,381\,621\,468\,592\,963\,895\,217\,599\,993\,229\,915\,608\,941\,463\,976\,156\,518\,286\,253\,697\,920\,827\,223\,758\,251\,185\,210\,916\,864\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$.
La généralisation est immédiate.
Pour la dernière question, il suffit de prouver que

$$E\left(\frac{2m}{p^k}\right)+E\left(\frac{2n}{p^k}\right)\geq E\left(\frac{m}{p^k}\right)+E\left(\frac{n}{p^k}\right)+E\left(\frac{m+n}{p^k}\right)$$

ou plus simplement que

$$E\left(2a\right)+E\left(2b\right)\geq E\left(a\right)+E\left(b\right)+E\left(a+b\right)$$

(traiter les cas $E\left(a\right)\leq a<E\left(a\right)+\frac{1}{2}$, *idem avec* b *)*

Exercice 15

Déterminer les solutions $a\geq b$ *dans* $\mathbb{Z}^2$ *de*

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}=\frac{6}{37} \qquad (E)$$

Solution. *Soit* (a,b) *une solution, on pose* $S=a+b$ *et* $P=ab$, *alors*

$$(E)\Leftrightarrow\frac{S}{S^2-2ab}=\frac{6}{37}\Leftrightarrow S\left(37-6S\right)=-12P$$

On en déduit que 12 *divise* $S\left(37-6S\right)$. *Mais ni* 2, *ni* 3 *ne divise* $\left(37-6S\right)$ *(car sinon ils diviseraient* 37*), ainsi* 12 *divise* S. *On pose alors* $S=12u$. (E) *donne ainsi* $P=-u\left(37-72u\right)$, *et* a *et* b *sont solutions de*

$$X^2 - 12uX + 72u^2 - 37u \qquad (E')$$

(E') admet donc un discriminant (réduit) $\Delta' = 37u - 36u^2$ positif. Il est alors facile de voir que nécessairement $u = 1$ ($u = 0$ est à rejeter). On a alors $a = 7$ et $b = 5$. On vérifie que $\dfrac{5+7}{25+49} = \dfrac{12}{74} = \dfrac{6}{37}$.

Le lecteur peut construire d'autres exercices de ce type, en remplaçant $\dfrac{6}{37}$ par $\dfrac{p}{q}$, avec $q = p^2 + r^2$ où $1 \leq r \leq p-1$ de façon à avoir p et q sans facteurs communs. On trouve alors $a = p + r$ et $b = p - r$.

Exercice 16

Une puissance de 2 augmentée d'une unité peut-elle être un cube ?

Solution. *Il s'agit de résoudre l'équation en nombres entiers naturels*

$$2^n + 1 = m^3$$

Il est clair que m doit être impair, et

$$2^n = m^3 - 1 = (m-1)\left(m^2 + m + 1\right)$$

On en déduit qu'il existe deux entiers naturels non nuls s et t tels que

$$\begin{aligned} m - 1 &= 2^s \\ m^2 + m + 1 &= 2^t \end{aligned}$$

d'où

$$(m-1)^2 = m^2 - 2m + 1 = 2^{2s}$$

et

$$\left(m^2 + m + 1\right) - \left(m^2 - 2m + 1\right) = 3m = 2^t - 2^{2s}$$

La contradiction provient du fait que $3m$ est impair alors que $2^t - 2^{2s}$ est pair.
