Formules BBP.

M.Gouy G.Huvent A. Ladureau

6 avril 2003

1 Introduction historique

Le 19 Septembre 1995 (à 0h29), Simon Plouffe découvre la formule suivante (dite BBP) :

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right)$$

et étonne la communauté mathématiques. Cette découverte est le fruit d'un mois de recherche avec D.Bailey et P.Borwein. L'intérêt de cette formule, de démonstration aisée, vient de son utilisation. Elle permet en effet le calcul **isolé** des chiffres binaires du nombre π.

On se propose de démontrer cette formule, et d'en trouver d'autres pour la constante π, mais également pour les constantes suivantes : $\ln 2, \ln 3, \ln 5$.

1.1 Lien entre formule BBP et intégrales

1.1.1 Un cas particulier

Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$, on pose

$$I_k = \int_0^1 \frac{y^k}{y^8 - 16} dy$$

que l'on réécrit ainsi

$$I_k = -\frac{1}{16} \int_0^1 \frac{y^k}{1 - \frac{y^8}{16}} dy$$

L'égalité

$$\sum_{i=0}^{N} a^i = \frac{1 - a^{N+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{N+1}}{1-a}$$

permet d'écrire que

$$\begin{aligned} I_k &= -\frac{1}{16} \int_0^1 \sum_{i=0}^{N} y^k \frac{y^{8i}}{16^i} dy - \frac{1}{16} \int_0^1 y^k \frac{y^{8(N+1)}}{1 - \frac{y^8}{16}} dy \\ &= -\frac{1}{16} \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{16^i} \int_0^1 \frac{y^{8i+k}}{16^i} dy - \int_0^1 \frac{y^{8(N+1)+k}}{16 - y^8} dy \\ &= -\frac{1}{16} \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{16^i} \frac{1}{8i + (k+1)} - R_N \end{aligned}$$

où

$$R_N = \int_0^1 \frac{y^{8(N+1)+k}}{16 - y^8} dy$$

Mais si $y \in [0,1]$, on a

$$0 \leq \frac{1}{16 - y^8} \leq \frac{1}{16 - 1}$$

d'où

$$R_N \leq \frac{1}{15}\int_0^1 y^{8(N+1)+k}dy = \frac{1}{15}\frac{1}{8(N+1)+k+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{y^k}{y^8-16}dy = -\frac{1}{16}\lim_{N\to+\infty}\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{16^i}\frac{1}{8i+(k+1)} = -\frac{1}{16}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{16^i}\frac{1}{8i+(k+1)}$$

(Ce résultat est immédiat avec la théorie des séries entières, mais la démonstration proposée est accessible à un éléve de Terminale S)

1.1.2 Cas général (à passer en première lecture)

Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $b \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale suivante

$$\begin{aligned} I(n,b,k) &= \int_0^1 \frac{y^k}{y^n-b}dy = -\frac{1}{b}\int_0^1 \frac{y^k}{1-\frac{y^n}{b}}dy = -\frac{1}{b}\int_0^1 \sum_{i=0}^{N} y^k\frac{y^{ni}}{b^i}dy - \frac{1}{b}\int_0^1 y^k\frac{y^{n(N+1)}}{1-\frac{y^n}{b}}dy \\ &= -\frac{1}{b}\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{b^i}\int_0^1 \frac{y^{ni+k}}{b^i}dy - \int_0^1 \frac{y^{n(N+1)+k}}{b-y^n}dy = -\frac{1}{b}\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{b^i}\frac{1}{ni+(k+1)} - R_N \end{aligned}$$

où

$$R_N = \int_0^1 \frac{y^{n(N+1)+k}}{b-y^n}dy \leq \frac{1}{b-1}\int_0^1 y^{n(N+1)+k}dy = \frac{1}{(b-1)}\frac{1}{n(N+1)+k+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{y^k}{y^n-b}dy = -\frac{1}{b}\lim_{N\to+\infty}\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{b^i}\frac{1}{ni+(k+1)} = -\frac{1}{b}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{b^i}\frac{1}{ni+(k+1)}$$

(Ce résultat est immédiat avec la théorie des séries entières, mais la démonstration proposée est accessible à un éléve de Terminale S)

1.2 Détermination des formules BBP

On en déduit que la formule de Plouffe se ramène à un calcul du type

$$\int_0^1 \frac{P(y)}{y^8-16}dy$$

où $P(y) = y^5 + y^4 + 2y^3 - 4$.

Exercice 1 *Vérifier la formule de Plouffe avec Maple*

On se propose donc de rechercher des formules BBP en calculant plus généralement une intégrale du type

$$\int_0^1 \frac{P(y)}{y^8-16}dy$$

où $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré au plus 6. Puis en examinant des intégrales du type

$$\int_0^1 \frac{P(y)}{y^n-b}dy$$

Exercice 2 *Trouver des formules BBP pour d'autres constantes simples, autres que π.*
Pour les forçats du calcul formel, essayez avec un dénominateur en $y^{12}-64$ et $y^{12}-729$.

2 Références

Le fascinant nombre π. J.P. Delahaye. Pour la Science. Diffusion Belin
`http://membres.lycos.fr/bgourevitch`
`http://perso.wanadoo.fr/gery.huvent`