Note informelle sur le wronskien

G.Huvent

28 octobre 2007

1 Avant propos

L'objet de ce document est de donner une réponse simple au problème suivant : étant donné deux fonctions f et g non proportionnelles, trouver une équation différentielle du second ordre dont f et g soient une base de l'ensemble des solutions. On verra également le lien avec le wronskien de f et g.

2 Réponse élémentaire au problème

Soient f et g deux fonctions définines sur I et non proportionnelles sur I. On cherche une équation différentielle du second ordre dont f et g soient solution. Une réponse élémentaire au problème est donnée par

$$\begin{vmatrix} f & g & y \\ f' & g' & y' \\ f'' & g'' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

qui admet clairement f et g comme solution.

Exemple 1 *Trouver une équation différentielle du second ordre admettant $x \mapsto e^{ax}$ et $x \mapsto e^{bx}$ comme solution. On retrouve bien*

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} & y \\ ae^{ax} & be^{bx} & y' \\ a^2e^{ax} & b^2e^{bx} & y'' \end{vmatrix} = e^{ax} \times e^{bx} \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ a & b & y' \\ a^2 & b^2 & y'' \end{vmatrix} = 0 \\
\iff &\begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ a & b & y' \\ a^2 & b^2 & y'' \end{vmatrix} = 0 \\
\iff &\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} y = 0 \\
\iff &(b-a)\, y'' - (b-a)\,(b+a)\, y' + ab\,(b-a)\, y = 0
\end{aligned}$$

Exemple 2 *Trouver une équation différentielle du second ordre admettant $x \mapsto e^{x^2}$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ comme solution. On trouve*

$$\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} & y \\ 2xe^{x^2} & -2xe^{-x^2} & y' \\ 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} & -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 2x & -2x & y' \\ 4x^2+2 & 4x^2-2 & y'' \end{vmatrix} = 0$$

Soit

$$xy'' - y' - 4x^3y = 0$$

3 Premier lien avec le Wronskien

Si on développe le déterminant on obtient

$$\begin{vmatrix} f & g & y \\ f' & g' & y' \\ f'' & g'' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} f & g \\ f'' & g'' \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix} y = 0$$

Si on considère le wronskien $w(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$, on a $w'(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f''(x) & g''(x) \end{vmatrix}$ et l'équation différentielle s'écrit alors

$$w(x)\,y'' - w'(x)\,y' + \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix} y = 0$$

soit en divisant par le wronskien

$$y'' - \frac{w'(x)}{w(x)} y' + \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix} y = 0 \tag{E_w}$$

Cette équation différentielle s'écrit donc

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$$

et on constate que le wronskien des solutions est solution de

$$y' + a(x)\,y = 0$$

car il est évident que $w(x)$ est solution de

$$y' - \frac{w'(x)}{w(x)} y = 0$$

Réciproquement, si on considère une équation différentielle $y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$, et si f et g forment une base de l'ensemble des solutions de cette équation, alors f et g sont solutions de (E_w). Donc par différence, f et g sont solutions de

$$\left(a(x) + \frac{w'(x)}{w(x)}\right) y' + \left(b(x) - \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix}\right) y = 0$$

puisque les deux fonctions sont non proportionnelles et que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du premier ordre est une droite vectorielle, cela impose

$$\begin{aligned} a(x) + \frac{w'(x)}{w(x)} &= 0 \\ b(x) - \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

En d'autres termes, on a unicité de l'équation différentielle normalisée du second ordre qui admet f et g comme solutions et on a prouvé que le wronskien des solutions de

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$$

vérifie

$$y' + a(x)\,y = 0$$

car on a toujours $a(x) = -\dfrac{w'(x)}{w(x)}$.

4 Le changement de fonction dans une equation du second ordre

On considère une équation différentielle du second ordre $y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = c(x)$. Soient f et g une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène. On vient de voir que

a)

$$a(x) = -\frac{w'(x)}{w(x)} \tag{1}$$

b) l'équation différentielle s'écrit, avant normalisation

$$\begin{vmatrix} f & g & y \\ f' & g' & y' \\ f'' & g'' & y'' \end{vmatrix} = w(x)\, y'' - w'(x)\, y' + \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix} y = 0 = 0$$

Si on connaît une solution, par exemple f, on pose classiquement $y(x) = z(x) \times f(x)$. L'équation devient alors

$$\begin{vmatrix} f & g & zf \\ f' & g' & zf' + z'f \\ f'' & g'' & zf'' + 2z'f' + z''f \end{vmatrix} \underset{C_3 - zC_1}{=} \begin{vmatrix} f & g & 0 \\ f' & g' & z'f \\ f'' & g'' & 2z'f' + z''f \end{vmatrix} = 0$$

soit

$$(2z'f' + z''f) \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} - z'f \begin{vmatrix} f & g \\ f'' & g'' \end{vmatrix} = 0$$

ce qui s'écrit

$$f(x)\, w(x)\, z'' + (2f'(x)\, w(x) - f(x)\, w'(x))\, z' = 0$$

soit en divisant

$$f(x)\, z'' + \left(2f'(x) - f(x)\frac{w'(x)}{w(x)}\right) z' = f(x)\, z'' + (2f'(x) + a(x)\, f(x))\, z' = 0$$

Or le changement de fonction $y(x) = f(x)\, z(x)$ dans $y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = c(x)$ conduit à une équation différentielle du type

$$f(x)\, z''(x) + (?)\, z' + (?)\, z = c(x)$$

dont l'équation homogène est, on vient de le voir, $f(x)\, z'' + (2f'(x) - a(x)\, f(x))\, z' = 0$. On a donc immédiatement la nouvelle équation différentielle, à savoir

$$f(x)\, z'' + (2f'(x) + a(x)\, f(x))\, z' = c(x)$$

Cette dernière équation différentielle s'écrit aussi

$$Z' + \left(2\frac{f'}{f} + a\right) Z = \frac{c}{f} \tag{E_Z}$$

en posant $Z = z'$, qui admet comme solution de l'équation homogène

$$\begin{aligned} Z_0(x) &= K \exp\left(-\int \left(2\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{w'(x)}{w(x)}\right) dx\right) \\ &= K \exp\left(-\ln f^2(x) + \ln w(x)\right) \\ &= K\frac{w(x)}{f^2(x)} \end{aligned}$$

Pour résoudre E_Z, on applique donc la variation de la constante, on a obtient donc

$$K'(x)\frac{w(x)}{f^2(x)} = \frac{c(x)}{f(x)}$$

5 Résolution d'une équation différentielle sur second ordre lorsque l'on connaît une solution

Pour résoudre l'équation différentielle normalisée

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$$

on procède donc ainsi

- On résout l'équation $w' + a(x)\,w = 0$ qui donne le wronskien $w(x)$ à un facteur multiplicatif près (on choisit le plus adapté).
- On intègre $K'(x)\,\dfrac{w(x)}{f^2(x)} = \dfrac{c(x)}{f(x)} \Longleftrightarrow K'(x) = \dfrac{c(x)\,f(x)}{w(x)}$ qui donne $K(x)$ et permet d'obtenir $z'(x) = Z(x) = C_1\dfrac{w(x)}{f^2(x)} + K(x)\,\dfrac{w(x)}{f^2(x)}$
- On intègre $z'(x)$ pour avoir $z(x) = C_1\displaystyle\int \frac{w(x)}{f^2(x)}dx + \int K(x)\,\frac{w(x)}{f^2(x)}dx + C_2$ puis $y(x) = f(x) \times z(x)$ qui s'écrit bien
$$C_1 f(x) \times \int \frac{w(x)}{f^2(x)}dx + C_2 f(x) + f(x) \times \int K(x)\,\frac{w(x)}{f^2(x)}dx \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Dans le cas d'une équation homogène, on simplifie la démarche ainsi :

- On résout l'équation $w' + a(x)\,w = 0$ qui donne le wronskien $w(x)$.
- On intégre $z'(x) = C_1\dfrac{w(x)}{f^2(x)}$ pour avoir $z(x) = C_1\displaystyle\int \frac{w(x)}{f^2(x)}dx + C_2$ puis $y(x) = f(x) \times z(x)$ qui s'écrit bien

$$C_1 f(x) \times \int \frac{w(x)}{f^2(x)}dx + C_2 f(x) \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple 3 *Résoudre $x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(x)$ sachant que $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est solution (obtenu car c'est une équation d'Euler). On normalise en*

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Le wronskien est solution de $w' + \dfrac{4}{x}w = 0$, donc $w(x) = K\exp\left(-\int \dfrac{4}{x}dx\right) = \dfrac{K}{x^4}$. On intègre alors

$$K'(x) \times \frac{\frac{1}{x^4}}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = K'(x) = \frac{\frac{\ln(x)}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \ln x$$

ce qui donne $\int (x\ln x - x)\,dx = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{3}{4}x^2$

$$K(x) = x\ln x - x + C_1$$

D'où

$$\begin{aligned} z'(x) &= x\ln x - x + C_1 \\ z(x) &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2 + C_1 x + C_2 \\ y(x) &= \frac{z(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{3}{4} + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} \end{aligned}$$

6 Quelques exemples

Exercice 4 *Trouver une équation différentielle homogène ayant pour base de solution* $x^\alpha e^x$ *et* $x^\alpha e^{-x}$ *et ayant comme solution particulière* x^α.

Solution 5 *On calcule le déterminant*

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x^\alpha e^x & x^\alpha e^{-x} & y \\ \dfrac{d}{dx}\left(x^\alpha e^x\right) & \dfrac{d}{dx}\left(x^\alpha e^{-x}\right) & y' \\ \dfrac{d}{dx^2}\left(x^\alpha e^x\right) & \dfrac{d}{dx^2}\left(x^\alpha e^{-x}\right) & y'' \end{vmatrix} &= x^{\alpha-2}e^x \times x^{\alpha-2}e^{-x}\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & y \\ x^2+\alpha x & -x^2+\alpha x & y' \\ x^2+2x\alpha+\alpha(\alpha-1) & x^2-2x\alpha+\alpha(\alpha-1) & y'' \end{vmatrix} \\ &= x^{2\alpha-4}\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & y \\ x^2+\alpha x & -x^2+\alpha x & y' \\ x^2+2x\alpha+\alpha(\alpha-1) & x^2-2x\alpha+\alpha(\alpha-1) & y'' \end{vmatrix} \\ &= x^{2\alpha-4}\left[-2x^4y''+4x^3\alpha y'+2x^2\left(x^2-\alpha(\alpha+1)\right)y\right]\end{aligned}$$

L'équation homogène est donc

$$x^2y''-2\alpha xy'-\left(x^2-\alpha(\alpha+1)\right)y=0$$

On remplace alors $y(x)$ *par* x^α *pour avoir le second membre, ce qui donne*

$$\alpha(\alpha-1)x^\alpha-2\alpha^2x^\alpha-\left(x^2-\alpha(\alpha+1)\right)x^\alpha=-x^{\alpha+2}$$

L'équation différentielle cherchée est donc

$$x^2y''-2\alpha xy'-\left(x^2-\alpha(\alpha+1)\right)y=-x^{\alpha+2}$$

Par exemple avec $\alpha=-1$, *on obtient*

$$xy''+2y'-xy=-1$$

Exercice 6 *Trouver une équation différentielle homogène ayant pour base de solution* $\cos\left(x^2\right)$ *et* $\sin\left(x^2\right)$

Solution 7 *On calcule le déterminant* $\begin{vmatrix} \cos\left(x^2\right) & \sin\left(x^2\right) & y \\ \dfrac{d}{dx}\left(\cos\left(x^2\right)\right) & \dfrac{d}{dx}\left(\sin\left(x^2\right)\right) & y' \\ \dfrac{d}{dx^2}\left(\cos\left(x^2\right)\right) & \dfrac{d}{dx^2}\left(\sin\left(x^2\right)\right) & y'' \end{vmatrix}$ *qui fournit après simplification et division par* 2

$$xy''-y'+4x^3y=0$$

Exercice 8 *Résoudre* $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$ *après avoir cherché une solution polynômiale.*

Solution 9 *On cherche* $y(x)=a_nx^n+\cdots$, *que l'on remplace dans l'équation différentielle. Cela donne, en considèrant le coefficient dominant*

$$-n(n-1)a_n-2na_n+2a_n=0$$

soit puisque l'on suppose $a_n\neq 0$

$$n^2+n-2=0$$

qui admet comme solution positive $n=1$. *Si on remplace* $y(x)$ *par* $ax+b$, *on trouve que* $y(x)=x$ *est solution. On normalise l'équation en*

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{2}{1-x^2}y=0$$

On résout l'équation du wronskien $w'(x) - \dfrac{2x}{1-x^2} w(x) = 0$ *qui donne* $w(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. *On intègre alors* $\dfrac{w(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2(1-x^2)} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{1-x^2}$ *pour avoir*

$$\begin{aligned} z'(x) &= C_1 \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} + C_2 \\ &= C_1 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right) + C_2 \end{aligned}$$

et enfin les solutions sur tout intervalle où $1 - x^2 \neq 0$

$$y(x) = C_1 \left(-1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right) + C_2 x \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 10 *Résoudre*

$$y'' - y' + e^{2x} y = \sin(2e^x) e^{2x}$$

en prouvant que $f(x) = \sin(e^x)$ *est solution de l'équation homogène.*

Solution 11 *On remplace pour vérifier que* f *est bien solution. On résout*

$$w'(x) - w(x) = 0$$

qui donne le wronskien $w(x) = Ke^x$. *On intègre alors*

$$K'(x) = \frac{\sin(2e^x) e^{2x}}{e^x} \times \sin(e^x) = 2 \sin^2(e^x) \cos(e^x) e^x$$

soit

$$K(x) = \frac{2}{3} \sin^3(e^x)$$

et donne

$$\begin{aligned} z'(x) &= \left(C_1 + \frac{2}{3} \sin^3(e^x) \right) \frac{e^x}{\sin^2(e^x)} \\ &= C_1 \frac{e^x}{\sin^2(e^x)} + \frac{2}{3} e^x \sin(e^x) \end{aligned}$$

puis

$$z(x) = -C_1 \operatorname{cotan} e^x - \frac{2}{3} \cos e^x + C_2$$

et enfin

$$y(x) = -C_1 \cos(e^x) - \frac{1}{3} \sin 2e^x + C_2 \sin(e^x)$$

On est pas surpris de voir le $\cos(e^x)$ *comme solution de l'équation homogène!!*

Exercice 12 *Résoudre*

$$y'' + 2xy' + \left(x^2 + 1\right) y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

sachant que l'équation homogène admet deux solutions y_1 *et* y_2 *telles que* $y_2(x) = xy_1(x)$.

Solution 13 *Le wronskien vaut* $w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & xy_1 \\ y_1' & y_1 + xy_1' \end{vmatrix} \underset{C_2 - xC_1}{=} \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & y_1 \end{vmatrix} = y_1^2$, *donc*

$$2x = -\frac{w'(x)}{w(x)} = -\frac{2y_1' y_1}{y_1^2}$$

soit

$$y_1' + xy_1 = 0$$

cette équation différentielle admet comme solution

$$y_1(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On a donc l'autre solution, on peut faire la variation des constantes, ou bien faire varier une constante puisque l'on a déjà $\dfrac{w(x)}{y_1^2(x)} = 1$*. On intègre donc*

$$K'(x) = \frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = x$$

soit

$$K(x) = \frac{x^2}{2} \Longrightarrow z'(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 \Longrightarrow z(x) = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

et les solutions sont

$$y(x) = \left(\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Exercice 14 *Soient a et b deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. A quelle condition (nécessaire) l'équation différentielle $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ admet-elle deux solutions y_1 et y_2 telles que $\forall x,\ y_2(x) = xy_1(x)$?*

Solution 15 *Dans ce cas le wronskien vaut y_1^2 (cf exercice précédent), soit*

$$a(x) = -\frac{2y_1'y_1}{y_1^2} \Longrightarrow y_1' - \frac{a(x)}{2}y_1 = 0$$

En dérivant cette équation, on obtient

$$y_1'' - \frac{a(x)}{2}y_1' - \frac{a'(x)}{2}y_1 = 0$$

d'où puisque $y_1' = \dfrac{a(x)}{2}y_1$ *et* $y_1'' = a(x)y_1' + b(x)y_1 = \left(\dfrac{a(x)^2}{2} + b(x)\right)y_1$

$$\left(\frac{a(x)^2}{2} + b(x) - \frac{a(x)^2}{4} - \frac{a'(x)}{2}\right)y_1 = 0$$

soit

$$2a'(x) + a^2(x) - 4b(x) = 0$$

sachant que l'on a divisé par $y_1(x)$ un peu partout, mais que si $y_1(x_0) = 0$, alors $w(x_0) = 0$ donc $w = 0$ et alors $y_1 = 0\ \cdots$
L'équation $y'' + 2xy' + \left(x^2+1\right)y$ vérifie bien

$$2 \times (2) + (2x)^2 - 4\left(x^2+1\right) = 0$$

Je n'ai pas réfléchi au problème de la réciproque !