# Deux suites en Miroir

G.Huvent

http ://perso.wanadoo.fr/gery.huvent

19 juin 2003

On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,\ u_2 = 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n} \\ v_1 &= 0,\ v_2 = 1,\ v_{n+2} = \frac{v_{n+1}}{n} + v_n \end{aligned}$$

Que peut-on dire de ces deux suites ?

## 1 Pour $(v_n)_n$

Un calcul des premiers termes $0, 1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{15}{8}$ laisse suggérer que

$$\forall p \geq 1,\ v_{2p} = v_{2p+1}$$

Cette propriété se prouve par récurrence sur $p$, en effet c'est vrai pour $p = 1$. Supposons que $v_{2p} = v_{2p+1}$ alors

$$v_{2p+2} = \frac{v_{2p}}{2p} + v_{2p} = \frac{2p+1}{2p} v_p$$

et

$$\begin{aligned} v_{2p+3} &= \frac{v_{2p+2}}{2p+1} + v_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} \times \frac{2p+1}{2p} v_p + v_{2p} \\ &= \frac{2p+1}{2p} v_p = v_{2p+2} \end{aligned}$$

d'où le résultat. On constate en plus que la suite $(v_{2p})_p$ vérifie

$$v_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p} v_p$$

récurrence facile à résoudre. On en déduit que

$$v_{2p} = v_{2p+1} = (2p-1) \frac{C_{2p-2}^{p-1}}{2^{2p-2}}$$

## 2 Pour $(u_n)_n$

Considèrons la fonction génératrice de la suite $(u_n)_n$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$$

la récurrence donnée se traduit par

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n+2} x^n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_{n+1} x^n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} x^n$$

soit

$$\frac{f(x) - u_2 x^2 - u_1}{x^2} - \frac{f(x) - u_1 x}{x} - \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt = 0$$

en dérivant, on obtient

$$\frac{-x(x-1)\frac{df(x)}{dx} - \left(x^2 - x + 2\right) f(x) + u_1 x}{x^3}$$

ainsi $f$ est solution de l'équation différentielle

$$x(x-1)y' + \left(x^2 - x + 2\right) y = u_1 x$$

dont la solution générale est

$$\frac{x u_1}{(x-1)^2} + \frac{C x^2 e^{-x}}{(x-1)^2}$$

compte tenu de $u_1 = 0$ et de $u_2 = 1 = \frac{f^{(2)}(0)}{2}$ on trouve

$$f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{(x-1)^2}$$

Il s'agit maintenant de déterminer le développement en série entières de $f$ afin de récupérer les termes de la suite. Pour cela on remarque que

$$\frac{e^{-x}}{1-x} = \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt$$

( $\frac{f(x)}{x} = v_2 x + v_3 x^2 + ....$est définie en 0 )
Ensuite, on se souvient que si

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

alors

$$\frac{h(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n \text{ où } S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

(Faire le produit de Cauchy des séries)
Ainsi

$$\frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n$$

et

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^{n-1}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^{n}$$

et

$$\forall n \geq 1,\ u_n = n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

en particulier

$$\left( \frac{u_n}{n} \right)_n \text{ converge (très rapidement) vers } \frac{1}{e}$$

**Remarque 1** *Si on opère de même avec la suite $(v_n)_n$, la fonction génératrice est solution de*

$$x(x-1)(x+1)y' + (x+2)y = x(x+1)v_1$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n = \frac{x^2}{x^2-1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

*qui vérifie*

$$\int_0^x \frac{g(x)}{x^2} = 1 - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1 - \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$$

*avec*

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_{2k}^k}{4^k} x^k$$