Une preuve élémentaire de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{18}$ par la méthode d'Apéry.

Géry Huvent.

24 Mars 2008

1 Une égalité

Proposition 1 *Quelques soient les réels $x, a_1, .., a_n$ tels que $x(x+a_1)..(x+a_N) \neq 0$*
$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_1 a_2 .. a_{k-1}}{(x+a_1)..(x+a_k)} = \frac{1}{x} - \frac{a_1 a_2 .. a_N}{x(x+a_1)..(x+a_N)}$$
où dans la somme de droite par convention le premier terme est $\frac{1}{x+a_1}$.

Preuve. On pose $A_k = \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}{(x+a_1)\cdots(x+a_k)}$ ($A_0 = \dfrac{1}{x+a_1}$) et $B_k = \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_k}{x(x+a_1)\cdots(x+a_k)}$ ($B_0 = \dfrac{1}{x}$), on vérifie que $B_{k-1} - B_k = A_k$. Ainsi par sommation, on obtient le résultat ■

2 Le résultat

La méthode utilisée est due à R.Apéry. On choisit $a_k = -k^2$ et $x = n^2$ et $N = n-1$. On obtient alors, en remarquant que $n^2\left(n^2-1^2\right)\cdots\left(n^2-(n-1)^2\right) = \dfrac{(2n)!}{2}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)} &= \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!^2}{n^2\left(n^2-1^2\right)\cdots\left(n^2-(n-1)^2\right)} \\
&= \frac{1}{n^2} - \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\dbinom{2n}{n}}
\end{aligned}$$

Soit
$$a_{n,k} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2 n(n-k-1)!}{(n+k)!} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)}$$
alors si
$$\begin{aligned}
b_{n,k} &= \frac{(-1)^{n+k}(k-1)!^2(n-k)!}{2(n+k)!} \\
&= \frac{(-1)^{n+k}}{2k^2\dbinom{n+k}{k}\dbinom{n}{k}}
\end{aligned}$$

on vérifie (Maple le fait très facilement avec la première expression) que

$$(-1)^{n-1}\, a_{n,k} = b_{n,k} - b_{n-1,k}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-1}\, a_{n,k} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1}(b_{n,k} - b_{n-1,k}) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{n=k+1}^{N}(b_{n,k} - b_{n-1,k}) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1}(b_{N,k} - b_{k,k}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{(-1)^{N+k}}{k^2\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2\binom{2k}{k}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{N+k}}{k^2\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2\binom{2k}{k}}
\end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} = \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{N+k}}{k^2\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{N+k}}{k^2\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}}\right| &\leq \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N^2} = \frac{1}{N} \leq \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \\
\text{car } \binom{N+k}{k} &\geq N+k \geq N \text{ et } \binom{N}{k} \geq N
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

qui équivaut (en regroupant les termes pairs et impairs, ce qui est licite)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{18}$$

La même méthode peut s'appliquer pour démontrer la formule d'Apéry..

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}$$

On a toujours

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)} &= \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!^2}{n^2\,(n^2-1^2)\cdots\Big(n^2-(n-1)^2\Big)} \\
&= \frac{1}{n^2} - \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\binom{2n}{n}}.
\end{aligned}$$

Soit

$$c_{n,k} = \frac{1}{2}\frac{(k-1)!^2(n-k)!}{k(n+k)!}$$

alors

$$(-1)^k n\,(c_{n,k} - c_{n-1,k}) = \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\,(a_{n,k} - a_{n-1,k}) &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3} - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1}(-1)^k \sum_{n=k+1}^{N}(c_{n,k} - c_{n-1,k}) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1}(-1)^k \sum_{n=k+1}^{N}(c_{n,k} - c_{n-1,k}) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1}(-1)^k\,(c_{N,k} - c_{k,k}) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1}\frac{(-1)^k}{2k^3\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}}
\end{aligned}$$

En regroupant les résultats, on a

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3} = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}} + \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{2k^3\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que le deuxième terme de droite tend vers zéro quand N tend vers l'infini.