Sommes d'Euler et analogues

G.Huvent

20 février 2002

Résumé

Le calcul de certaines primitives permet de donner des formes closes aux sommes d'Euler et des sommes analogues.

1 Etude de $f_p^k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^k}{n^p} x^n$ et de $g_p^k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^k}{(n+1)^p} x^{n+1}$

1.1 Définition, relations remarquables

On pose

$$\begin{aligned} H_0 &= 0 \\ H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_p^k(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^k}{n^p} x^n \\ g_p^k(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^k}{(n+1)^p} x^{n+1} \end{aligned}$$

Ces séries ont un rayon de convergence égal à 1. La convergence a lieu sur le bord dès que $p > 1$ (car $H_n \sim \ln(n)$). Alors

$$\begin{aligned}
x\frac{df_p^k(x)}{dx} &= f_{p-1}^k(x) \Longleftrightarrow f_p^k(x) = \int_0^x \frac{f_{p-1}^k(t)}{t}dt \\
x\frac{dg_p^k(x)}{dx} &= g_{p-1}^k(x) \Longleftrightarrow g_p^k(x) = \int_0^x \frac{g_{p-1}^k(t)}{t}dt \\
f_p^0(x) &= \frac{1}{1-x} \\
g_p^0(x) &= L_p(x) - x \\
g_1^k(x) &= \int_0^x f_0^k(x)\,dx \\
g_p^k(x) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i f_{p+i}^{k-i}(x) \text{ Si } k \geq 1 \\
f_0^k(x) &= \frac{1}{1-x}\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} C_k^i f_i^{k-i}(x) \text{ Si } k \geq 1 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
H_n^k - H_{n-1}^k &= H_n^k - \left(H_{n-1} - \frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} C_k^i \frac{H_n^{k-i}}{n^i}
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^k - H_{n-1}^k\right)x^n = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1} C_k^i \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{k-i}}{n^i}x^n\right)$$

$$(1-x)\,f_0^k(x) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1} C_k^i f_i^{k-i}(x)$$

De même

$$\frac{H_n^k}{(n+1)^p} = \frac{\left(H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^k}{(n+1)^p} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_k^i \frac{H_{n+1}^{k-i}}{(n+1)^{p+i}}$$

■

1.2 Calcul de certaines fonctions

Un développement usuel (faire le produit de Cauchy) donne

$$f_0^1(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x} \text{ pour } |x| < 1$$

1.2.1 Utilisation de l'expression de f_0^1

L'expression obtenue pour $f_0^1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ permet le calcul de certaines sommes de séries. En effet avec $x = \frac{1}{2}$, on obtient immédiatement le résultat suivant.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^n} = \ln 2$$

Pour $x = \frac{1+i}{2}$, en considérant les parties réelles et imaginaires, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^{\frac{n}{2}}} \cos \frac{n\pi}{4} &= \operatorname{Re}\left(-\frac{\ln\left(1-\frac{1+i}{2}\right)}{1-\frac{1+i}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\pi \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^{\frac{n}{2}}} \sin \frac{n\pi}{4} &= \operatorname{Im}\left(-\frac{\ln\left(1-\frac{1+i}{2}\right)}{1-\frac{1+i}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}\pi
\end{aligned}$$

où ln est la détermination principale du logarithme qui coïncide avec le développement en série de $\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$. En combinant ces deux égalités, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^{\frac{n}{2}}} \left(\sin \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{n\pi}{4}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^{\frac{n}{2}}} \sqrt{2} \sin \frac{(n-1)\pi}{4} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^{\frac{n-1}{2}}} \sin \frac{(n-1)\pi}{4} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_{n+1}}{2^{\frac{n}{2}}} \sin \frac{n\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$H_1 + H_2 + \frac{H_3}{2} - \frac{H_5}{4} - \frac{H_6}{4} - \frac{H_7}{8} + \frac{H_9}{16} + \frac{H_{10}}{16} + \frac{H_{11}}{32} - \frac{H_{13}}{64} - \cdots = \pi$$

Et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^{\frac{n}{2}}} \left(\sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^{\frac{n}{2}}} \sqrt{2} \sin \frac{(n+1)\pi}{4} \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

soit

$$H_1 + \frac{H_2}{2} - \frac{H_4}{4} - \frac{H_5}{4} - \frac{H_6}{8} + \frac{H_8}{16} + \frac{H_9}{16} + \frac{H_{10}}{32} - \frac{H_{12}}{64} - \frac{H_{13}}{64} \cdots = \ln 2$$

1.2.2 Calcul des autres fonctions

Puis par intégrations de f_0^1, on obtient

$$f_1^1(x) = \frac{1}{2}\ln^2(1-x) + L_2(x) = \frac{1}{2}L_1(x)^2 + L_2(x)$$

et

$$f_2^1(x) = \frac{\ln^2(1-x)\ln(x)}{2} + \ln(1-x)L_2(1-x) + L_3(x) - L_3(1-x) + \zeta(3)$$

Avant de continuer, examinons cette égalité. Pour $x=-1$, la série définissant f_2^1 converge, mais le membre de droite de l'égalité précédente n'est pas défini. Cependant avec les formules d'Euler et de Landen, on obtient

$$\begin{aligned} f_2^1(x) &= -\ln(1-x)L_2(x) + 2L_3(x) + L_3\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{6}\ln^3(1-x) \\ &= \frac{1}{3}\ln^3(1-x) + \ln(1-x)L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) + L_3\left(\frac{x}{x-1}\right) + 2L_3(x) \end{aligned}$$

La dernière égalité nous donne une expression de $f_2^1(x)$ valable sur $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$. Par prolongement analytique, on sait que les différentes expressions obtenues coïncident là où elle sont simultanément définies.
On utilisera donc, si nécessaire, différentes expressions pour le calcul des fonctions f_p^k en $x=-1$ et $x=\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} f_3^1(x) &= -\frac{1}{12}\ln^3(1-x)L_1\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{1}{2}\ln^2(1-x)L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) + \ln(1-x)L_3\left(\frac{x}{x-1}\right) \\ &\quad + L_4\left(\frac{x}{x-1}\right) + 2L_4(x) + \frac{1}{24}\ln^4(1-x) - \frac{1}{6}\ln^3(1-x)\ln(x) \\ &\quad - \frac{1}{2}\ln^2(1-x)L_2(1-x) + \ln(1-x)L_3(1-x) - L_4(1-x) \\ &= \frac{1}{24}\ln^4(1-x) - \frac{1}{6}\ln^3(1-x)\ln(x) + \frac{\pi^2}{12}\ln^2(1-x) - \ln(1-x)L_3(x) \\ &\quad + \zeta(3)\ln(1-x) + L_4\left(\frac{x}{x-1}\right) + 2L_4(x) - L_4(1-x) + \frac{\pi^4}{90} \end{aligned}$$

On déduit du calcul de f_1^1 que

$$f_0^2(x) = \frac{\ln^2(1-x) + L_2(x)}{1-x}$$

puis par intégration que

$$\begin{aligned} f_1^2(x) &= -\ln(1-x)L_2(x) - \frac{1}{3}\ln^3(1-x) + L_3(x) \\ &= L_1(x)L_2(x) + \frac{1}{3}L_1(x)^2 + L_3(x) \\ f_2^2(x) &= -\frac{1}{3}\ln(x)\ln^3(1-x) - \ln^2(1-x)L_2(1-x) + \frac{1}{2}L_2(x)^2 + 2\ln(1-x)L_3(1-x) \\ &\quad - 2L_4(1-x) + L_4(x) + \frac{\pi^4}{45} \\ &= -\frac{1}{3}L_1(1-x)L_1(x)^3 - L_1(x)^2L_2(1-x) + \frac{1}{2}L_2(x)^2 - 2L_1(x)L_3(1-x) \\ &\quad - 2L_4(1-x) + L_4(x) + 2L_4(1) \end{aligned}$$

Enfin

$$f_0^3(x) = \frac{-\frac{\pi^2}{2}\ln(1-x) + \frac{3}{2}\ln^2(1-x)\ln(x) - \ln^3(1-x) + L_3(x) + 3L_3(1-x) - 3\zeta(3)}{1-x}$$

et ainsi

On en déduit que

$$\begin{aligned}
g_0^1(x) &= -\frac{x\ln(1-x)}{1-x} = L_0(x)L_1(x) \\
g_1^1(x) &= \frac{\ln^2(1-x)}{2} = \frac{1}{2}L_1(x)^2 \\
g_2^1(x) &= \frac{1}{2}\ln^2(1-x)\ln(x) + \ln(1-x)L_2(1-x) - L_3(1-x) + \zeta(3) \\
&= -\frac{1}{2}L_1(x)^2 L_1(1-x) - L_1(x)L_2(1-x) - L_3(1-x) + L_3(1) \\
g_3^1(x) &= f_3^1(x) - L_4(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_0^2(x) &= \frac{x\left(\ln^2(1-x) + L_2(x)\right)}{1-x} = L_0(x)L_1(x)^2 + L_0(x)L_2(x) \\
g_1^2(x) &= -\frac{1}{3}\ln^3(1-x) - \ln^2(1-x)\ln(x) - \ln(1-x)L_2(x) - 2\ln(1-x)L_2(1-x) + 2L_3(1-x) - 2\zeta(3) \\
&= \frac{1}{3}L_1(x)^3 - L_1(x)^2 L_1(1-x) + L_1(x)L_2(x) + 2L_1(x)L_2(1-x) + 2L_3(1-x) - 2L_3(1) \\
g_2^2(x) &= \frac{1}{2}L_2(x)^2 - \frac{1}{3}\ln(x)\ln^3(1-x) - \ln^2(1-x)L_2(1-x) + 2\ln(1-x)L_3(1-x) \\
&\quad -2L_4(1-x) + \frac{\pi^4}{45} + 2L_4(x) - 2f_3^1(x) \\
&= -\frac{1}{3}L_1(1-x)L_1(x)^3 - L_1(x)^2 L_2(1-x) + \frac{1}{2}L_2(x)^2 - 2L_1(x)L_3(1-x) \\
&\quad -2L_4(1-x) + 2L_4(1) + 2L_4(x) - 2f_3^1(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_0^3(x) &= \frac{x}{1-x}\left(L_3(x) + \frac{3}{2}\ln^2(1-x)\ln(x) - \frac{\pi^2}{2}\ln(1-x) + 3L_3(1-x) - 3\zeta(3) - \ln^3(1-x)\right) \\
&= L_0(x)L_3(x) - \frac{3}{2}L_0(x)L_1(1-x)L_1(x)^2 + 3L_0(x)\left(L_3(1-x) - L_3(1)\right) + L_0(x)L_1(x)^3 + 3L_0(x)L_1(x)L_2(1) \\
g_1^3(x) &= f_1^3(x) + 3f_3^1(x) - 4L_4(x) - \frac{3}{2}L_2(x)^2 + \ln(x)\ln^3(1-x) + 3\ln^2(1-x)L_2(1-x) - 6\ln(1-x)L_3(1-x) \qquad (2) \\
&\quad +6L_4(1-x) - \frac{\pi^4}{15}
\end{aligned}$$

Par un calcul de primitive, on a

$$\begin{aligned}
g_1^3(x) &= \int_0^x f_0^3(t)\,dt = -\frac{1}{2}L_2(x)^2 - \ln(1-t)L_3(x) + 3\ln^2(1-x)L_2(1-x) - 3\ln(1-x)L_3(1-x) + 3\ln(1-x)\zeta(3) \\
&\quad +\frac{3}{2}L_2(x)\ln^2(1-x) + \frac{3}{2}\ln^3(1-x)\ln(x) + \frac{1}{4}\ln^4(1-x)
\end{aligned}$$

ce qui donne pour x réel

$$\begin{aligned} f_1^3(x) &= L_2(x)^2 + 2\ln(1-x)L_3(x) + 3\ln(1-x)L_3(1-x) + \frac{3}{2}\ln^2(1-x)L_2(x) + \ln^3(1-x)\ln(x) \\ &\quad + \frac{1}{8}\ln^4(1-x) - 2L_4(x) - 3L_4\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{\pi^2}{4}\ln^2(1-x) - 3L_4(1-x) + \frac{\pi^4}{30} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_3^1(x) &= \frac{1}{24}\ln^4(1-x) + L_4\left(\frac{x}{x-1}\right) + L_4(x) - \frac{1}{6}\ln^3(1-x)\ln(x) + \frac{\pi^2}{12}\ln^2(1-x) - \ln(1-x)L_3(x) \\ &\quad + \zeta(3)\ln(1-x) - L_4(1-x) + \frac{\pi^4}{90} \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} f_0^4(x) &= \frac{1}{x-1}\left(-\frac{2\pi^4}{45} - 4\zeta(3)\ln(1-x) - 4\ln(1-x)L_3(x)) - \frac{\pi^2}{3}\ln^2(1-x) + 8L_4\left(\frac{x}{x-1}\right) + 7L_4(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3}\ln^3(1-x)\ln(x) - \frac{2}{3}\ln^4(1-x) + 4L_4(1-x) - L_2(x)^2\right) \end{aligned}$$

2 Application au calcul de certaines séries

On utilise les résultats qui précédent avec des valeurs judicieusement choisies pour x

2.1 Avec $x = 1$

Les valeurs des séries s'obtiennent plus facilement avec les fonctions Beta, il s'agit du calcul classique des sommes d'Euler.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^3} = \frac{\pi^4}{72}$$

2.2 Avec $x = \frac{1}{2}$

On obtient en prenant les valeurs des fonctions f_p^k et g_p^k en $x = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^{n+1}} = \ln(2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n2^n} &= \frac{\pi^2}{12} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^2}{2^n} &= \frac{\pi^2}{6} + \ln^2(2) \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)2^n} &= \ln^2(2) \end{aligned}$$

En combinant ,on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n\left(nH_n-2\right)}{n2^n}=\ln^2\left(2\right)$$

2.2.1 Calcul de $f_p^k\left(\frac{1}{2}\right)$ pour $k+p=3$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^3}{2^n} &= \zeta\left(3\right)+\frac{\pi^2\ln\left(2\right)}{3}+\frac{\ln^3\left(2\right)}{3} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^2}{n2^n} &= \frac{7}{8}\zeta\left(3\right) && \text{(Une des plus belles)} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^2 2^n} &= \zeta\left(3\right)-\frac{\pi^2\ln\left(2\right)}{12} && (3)
\end{aligned}$$

On peut obtenir alors

$$\frac{96}{7}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n\left(nH_n-\frac{7}{8}\right)}{n^2 2^n}=\pi^2\ln\left(2\right)$$

2.2.2 Calcul de $f_p^k\left(\frac{1}{2}\right)$ pour $k+p=4$

Pour résumer :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^4}{2^n} &= \frac{93}{4}\zeta\left(4\right)-15\ln\left(2\right)\zeta\left(3\right)+7\zeta\left(2\right)\ln^2\left(2\right)-\frac{5\ln^4\left(2\right)}{6}-22L_4\left(\frac{1}{2}\right) \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^3}{n2^n} &= \frac{25}{4}\zeta\left(4\right)-\frac{35}{8}\ln\left(2\right)\zeta\left(3\right)+\frac{5}{4}\zeta\left(2\right)\ln^2\left(2\right)-\frac{5\ln^4\left(2\right)}{24}-5L_4\left(\frac{1}{2}\right) \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^2}{n^2 2^n} &= \frac{37}{16}\zeta\left(4\right)-\frac{7}{4}\ln\left(2\right)\zeta\left(3\right)+\frac{1}{4}\zeta\left(2\right)\ln^2\left(2\right)-\frac{\ln^4\left(2\right)}{24}-L_4\left(\frac{1}{2}\right) \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^3 2^n} &= \frac{1}{8}\zeta\left(4\right)-\frac{1}{8}\zeta\left(3\right)\ln 2+\frac{\ln^4 2}{24}+L_4\left(\frac{1}{2}\right) \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4 2^n} &= L_4\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^3}{\left(n+1\right)2^n} &= -\frac{5}{8}\zeta\left(4\right)+\ln\left(2\right)\zeta\left(3\right)+\zeta\left(2\right)\ln^2\left(2\right)+\frac{\ln^4\left(2\right)}{12} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^2}{\left(n+1\right)^2 2^n} &= \frac{33}{8}\zeta\left(4\right)-3\ln\left(2\right)\zeta\left(3\right)+\frac{1}{2}\zeta\left(2\right)\ln^2\left(2\right)-\frac{\ln^4\left(2\right)}{4}-4L_4\left(\frac{1}{2}\right) \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{\left(n+1\right)^3 2^n} &= \frac{1}{4}\zeta\left(4\right)-\frac{1}{4}\ln 2\zeta\left(3\right)+\frac{\ln^4\left(2\right)}{12}
\end{aligned}$$

On peut combiner ces résultats et obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^2 \left(nH_n - 5\right)}{n^2 2^n} = -\frac{17\pi^4}{288} + \frac{35}{8} \ln(2) \zeta(3)$$

2.3 Avec $x = -1$

La convergence de la série ne pose pas de problème pour $p \geq 2$, on obtient alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n^2} = -\frac{5}{8}\zeta(3)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{(n+1)^2} = \frac{1}{8}\zeta(3)$$

Pour $p = 1$ on trouve formellement

$$\begin{aligned} \frac{\ln^2(2)}{2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{n+1} \\ \frac{\ln^2(2)}{2} - \frac{\pi^2}{12} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1) H_n}{n(n+1)}$$

Ces égalités se justifient car les séries alternées convergent.
Les deux égalités suivantes sont obtenues formellement par Maple, elle se vérifient numériquement mais je n'arrive pas à les justifier correctement.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n^3} &= -\frac{11\pi^4}{360} + \frac{7}{4}\zeta(3)\ln(2) - \frac{\pi^2}{12}\ln^2(2) + \frac{1}{12}\ln^4(2) + 2L_4\left(\frac{1}{2}\right) \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_n^2}{n^2} &= -\frac{41\pi^4}{1440} + \frac{7}{4}\zeta(3)\ln(2) - \frac{\pi^2}{12}\ln^2(2) + \frac{1}{12}\ln^4(2) + 2L_4\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne en les soustrayant et avec $nH_n - 1 = nH_{n-1}$

$$\begin{aligned} \frac{3}{16}\zeta(4) &= \frac{\pi^4}{480} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_n H_{n-1}}{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_{n+1} H_n}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

On a aussi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_n^3}{n} = -\frac{\pi^4}{144} + \frac{9}{8}\zeta(3)\ln(2) - \frac{\pi^2}{8}\ln^2(2) + \frac{\ln^4(2)}{4}$$

2.4 Avec $x = i$

On obtient alors en considérant les parties réelles et imaginaires

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_{2n}}{n} &= \frac{\ln^2 2}{4}-\frac{5\pi^2}{48} \\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}}{2n+1} &= -\frac{\pi\ln(2)}{8}+G\end{aligned} \tag{k=1,n=1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_{2n}^2}{n} &= \frac{\pi^2\ln(2)}{12}-\frac{\pi G}{2}-\frac{\ln^3 2}{12}-\frac{3\zeta(3)}{16} \\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}}{2n+1} &= \frac{\pi^3}{48}-\frac{G\ln(2)}{2}+\frac{\pi\ln^2 2}{16}\end{aligned} \tag{k=2,n=1}$$

La convergence est assurée en faisant $f_1^1(ix)$ pour $x<1$ réel et par passage à la limite en $x=1$ avec le lemme d'Abel.

2.4.1 Avec $k=1, p=2$

On obtient compte tenu de la valeur de $L_3(i)$ et de l'égalité de Landen en $x=i$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_{2n}}{n^2}+i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^2} &= L_3\left(\frac{1-i}{2}\right)+\frac{5\pi^2\ln(2)}{192}-\frac{\pi G}{4}-\frac{3\zeta(3)}{16}-\frac{\ln^3 2}{48} \\ &\quad +I\left(\frac{\pi\ln^2 2}{32}+\frac{7\pi^3}{128}-\frac{G\ln 2}{2}\right)\end{aligned}$$

Or, j'ai prouvé que (cf article formules BBP, calcul de $I_4^{(2)}$)

$$\Re\left(L_3\left(\frac{1-i}{2}\right)\right)=\frac{35\zeta(3)}{64}-\frac{5\pi^2\ln 2}{192}+\frac{\ln^3 2}{48} \tag{4}$$

ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_{2n}}{n^2}=\frac{23\zeta(3)}{16}-\pi G$$

et permet d'obtenir avec $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}=-\frac{3}{4}\zeta(3)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(2nH_{2n}+\frac{23}{6}\right)}{n^3}=2\pi G$$

2.4.2 Avec $k+p=4$

Les calculs sont un peu plus compliqués, on utilise cette fois ci l'égalité (4) ,puis la formule d'inversion pour le polylogarithme d'ordre 4 qui donne

$$L_4(1-i) = -L_4\left(\frac{1+i}{2}\right) + \frac{11\pi^2\ln^2 2}{768} + \frac{1313\pi^4}{92160} - \frac{\ln^4 2}{384} - i\left(\frac{7\pi^3\ln 2}{256} + \frac{\pi\ln^3 2}{64}\right)$$

ainsi que

$$L_4(i) = -\frac{7\pi^4}{11520} + i\beta(4) \text{ où } \beta(n) = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$$

$$\Re\left(L_4\left(\frac{1+i}{2}\right)\right) = \frac{\ln^4 2}{96} - \frac{5\pi^2\ln^2 2}{768} + \frac{5}{16}L_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{343\pi^4}{92160}$$

qui correspond au calcul de $I_4^{(3)}$ dans mon papier "formules BBP", on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_{2n}}{n^3} = \frac{5\ln^4 2}{24} - \frac{5\pi^2\ln^2 2}{24} + 5L_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{13\pi^4}{192} + \frac{35\zeta(3)\ln 2}{8} \qquad \text{(k=1,p=3)}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^3} = 2\beta(4) - \frac{35\pi\zeta(3)}{128}$$

On applique les mêmes substitutions pour $k=2, p=2$ et $k=3, p=1$. On obtient alors en considérant la partie réelle (la partie imaginaire ne donne rien d'utilisable)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_{2n}^2}{n^2} &= -\frac{77\pi^4}{960} + \frac{5}{2}L_4\left(\frac{1}{2}\right)) - \frac{\pi^2\ln^2 2}{6} + \frac{35\zeta(3)\ln(2)}{16} + \frac{5\ln^4 2}{48} \\ &\quad +\pi G\ln(2) - 2G^2 - 2\pi\Im\left(L_3\left(\frac{1-i}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_{2n}^3}{n} &= \frac{\ln^4 2}{32} - \frac{7\pi^2\ln^2 2}{64} - \frac{211\pi^4}{4608} + \frac{93\zeta(3)\ln(2)}{64} \\ &\quad -2G^2 + \frac{3}{4}\pi G\ln(2) - \frac{3\pi}{2}\Im\left(L_3\left(\frac{1-i}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

En combinant les différentes équations obtenues, on en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{8H_n^3}{n} - \frac{6H_n^2}{n^2} + \frac{3H_n}{n^3}\right) = -\frac{127\pi^4}{1440} + \frac{93\zeta(3)\ln 2}{8} - \frac{\pi^2\ln^2 2}{2} + \frac{\ln^4 2}{4} - 4G^2$$

2.5 Avec $x = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

On utilise dans ce cas les résultats suivants.
Si on pose

$$\begin{aligned}mgl(n) &= \mathrm{Re}\left(i^n L_n\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right) \\ mcl(n) &= \mathrm{Im}\left(i^n L_n\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right)\end{aligned}$$

(mgl signifie "multiple Glaishers" et mcl signifie "multiple Clausen") alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{mgl}\,(n) &= \frac{(-1)^{n+1}\,2^{n-1}\pi^n B_n\left(\frac{1}{6}\right)}{n!}\\
\mathrm{mcl}\,(2n+1) &= \frac{(-1)^n}{2}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\zeta\,(2n+1)
\end{aligned}$$

où B_n est le énième polynôme de Bernoulli.

Puis la formule de duplication

$$L_n\,(z)+L_n\,(-z)=\frac{1}{2^{n-1}}L_n\left(z^2\right)$$

avec $z=e^{i\frac{\pi}{3}}$ qui permet d'exprimer $L_n\left(e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)$ et $L_n\left(e^{4i\frac{\pi}{3}}\right)$ à l'aide de $\mathrm{mgl}\,(n)$ et $\mathrm{mcl}\,(n)$.

Remarque 1 *Le calcul de* $L_3\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)=\frac{\zeta(3)}{3}+\frac{5i\pi^3}{162}$ *donne la série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^3}=\frac{5\pi^3}{162}$$

qui peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{8^3}-\frac{1}{10^3}-\cdots=\frac{5\sqrt{3}}{243}\pi^3$$

On obtient alors les résultats suivants :

2.5.1 Avec $k+p=2$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=-\frac{\pi^2}{36}\tag{5}$$

la convergence de cette série se justifie par sommation par paquets (ou par la règle d'Abel, à vérifier). En sommant par paquets de 3, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) &= \frac{H_1}{1}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{H_2}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\
&\quad+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{H_{3n}}{3n}\cos\left(\frac{3n\pi}{3}\right)+\frac{H_{3n+1}}{3n+1}\cos\left(\frac{(3n+1)\,\pi}{3}\right)+\frac{H_{3n+2}}{3n+2}\cos\left(\frac{(3n+2)\,\pi}{3}\right)\right)
\end{aligned}$$

Mais puisque

$$H_{3n+1}=H_{3n}+\frac{1}{3n+1}\ ,\ H_{3n+2}=H_{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}$$

on a

$$\begin{aligned}
&\frac{H_{3n}}{3n}\cos\left(\frac{3n\pi}{3}\right)+\frac{H_{3n+1}}{3n+1}\cos\left(\frac{(3n+1)\,\pi}{3}\right)+\frac{H_{3n+2}}{3n+2}\cos\left(\frac{(3n+2)\,\pi}{3}\right)\\
&= \frac{(-1)^n\left(18\,n^2+21\,n+4\right)H_{3n}}{6\,(3\,n+2)\,(3\,n+1)\,n}-\frac{(-1)^n\left(9\,n^2+3\,n-1\right)}{2\,(3\,n+1)^2\,(3\,n+2)^2}
\end{aligned}$$

Ceci permet d'affirmer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(18\,n^2+21\,n+4\right) H_{3n}}{6\,(3\,n+2)\,(3\,n+1)\,n} = -\frac{\pi^2}{36} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(9\,n^2+3\,n-1\right)}{2\,(3\,n+1)^2\,(3\,n+2)^2} + \frac{1}{8}$$

Le calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(9\,n^2+3\,n-1\right)}{2(3\,n+1)^2\,(3\,n+2)^2}$ est standard, il peut se faire avec Maple ou Mathematica et donne la valeur

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(9\,n^2+3\,n-1\right)}{2\,(3\,n+1)^2\,(3\,n+2)^2} = \frac{\pi^2}{27} - \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{8}$$

On obtient donc l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(18\,n^2+21\,n+4\right) H_{3n}}{n\,(3\,n+1)\,(3\,n+2)} = 2\ln 2 - \frac{7\pi^2}{18}$$

Enfin, puisque $H_{3n} = H_{3n-1} + \dfrac{1}{3n}$ et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(18\,n^2+21\,n+4\right)}{n\,(3\,n+1)\,(3\,n+2)} \times \frac{1}{3n} = \frac{9}{4} - 2\ln 2 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{\pi^2}{18}$$

on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(18\,n^2+21\,n+4\right) H_{3n-1}}{n\,(3\,n+1)\,(3\,n+2)} = 4\ln 2 - \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{9}{4}$$

le même genre de procédé donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(18\,n^2+21\,n+4\right) H_{3n-2}}{n\,(3\,n+1)\,(3\,n+2)} = \frac{2\ln 2}{3} - \frac{\pi^2}{3} + \frac{17\pi\sqrt{3}}{18} - \frac{13}{4}$$

On obtient aussi (sous réserve de convergence, à vérifier ! ! !)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = -\mathrm{mcl}\,(2)$$

mais

$$\mathrm{mcl}\,(2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}$$

d'où

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{H_n}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{nH_n - 1}{n^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{H_{n-1}}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

soit

$$0=\frac{H_1}{2}-\frac{H_3}{4}-\frac{H_4}{5}+\frac{H_6}{6}+\frac{H_7}{7}-\frac{H_8}{8}-\dots$$

2.5.2 Avec $k+p=3$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n^2}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)=\frac{\pi^3}{36}$$

ce qui donne

$$\frac{H_1^2}{1}+\frac{H_2^2}{2}-\frac{H_4^2}{4}-\frac{H_5^2}{5}+\frac{H_7^2}{7}+\frac{H_8^2}{8}-\frac{H_9^2}{9}\dots=\frac{\pi^3\sqrt{3}}{54}$$

la convergence de cette série se justifie par sommation par paquets.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)=\frac{11}{324}\pi^3$$

ce qui donne

$$\frac{H_1}{1}+\frac{H_2}{2^2}-\frac{H_4}{4^2}-\frac{H_5}{5^2}+\frac{H_7}{7^2}+\dots=\frac{11\sqrt{3}}{486}\pi^3$$

Cette formule peut également s'écrire en sommant par paquets

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{H_{3n+1}}{(3n+1)^2}\sin\left(\frac{(3n+1)\pi}{3}\right)+\frac{H_{3n+2}}{(3n+2)^2}\sin\left(\frac{(3n+2)\pi}{3}\right)\right)=\frac{11}{324}\pi^3$$

Avec $H_{3n+2}=H_{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}$, on obtient

$$\frac{H_{3n+1}}{(3n+1)^2}\sin\left(\frac{(3n+1)\pi}{3}\right)+\frac{H_{3n+2}}{(3n+2)^2}\sin\left(\frac{(3n+2)\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(-1)^n\left(18n^2+18n+5\right)H_{3n+1}}{(3n+2)^2(3n+1)^2}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^n\sqrt{3}}{(3n+2)^3}$$

Puisque (Maple ou Mathematica)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+2)^3}=-\frac{13}{36}\zeta(3)+\frac{5\sqrt{3}\pi^3}{486}$$

On obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(18n^2+18n+5\right)H_{3n+1}}{(3n+2)^2(3n+1)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(3n+1)^2}+\frac{1}{(3n+2)^2}\right)(-1)^nH_{3n+1}=\frac{13}{36}\zeta(3)+\frac{\sqrt{3}\pi^3}{81}\tag{6}$$

on a également

$$\frac{1}{3}\pi\times\mathrm{mcl}(2)+\zeta(3)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

2.5.3 Avec $k+p=4$

on obtient la belle formule suivante

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n^3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=\frac{17\pi^4}{4860}$$

les autres font intervenir des $mcl(2)$, $mcl(4)$...
Par exemple

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)&=2mcl(4)-\frac{2}{9}\pi\zeta(3) \qquad (7)\\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n^2}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)&=\frac{59\pi^4}{12960}-\frac{mcl(2)^2}{2}\end{aligned}$$

ce qui donne avec

$$mcl(4)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^4}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{9}\pi\zeta(3)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n^4}-\frac{H_n}{n^3}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\\ &=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2-nH_n}{n^4}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\\ &=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(1-nH_{n-1})}{n^4}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\\ \frac{4\pi\zeta(3)}{9\sqrt{3}}&=\left(1+\frac{1-2H_1}{2^4}-\frac{1-4H_3}{4^4}-\frac{1-5H_4}{5^4}+\frac{1-7H_6}{7^4}+\frac{1-8H_7}{8^4}-\frac{1-10H_9}{10^4}...\right)\end{aligned}$$

A partir de la relation $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n^3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=\frac{17\pi^4}{4860}$, en sommant par paquets de trois,on a

$$\sum_{n=1}^{2}\frac{H_n}{n^3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{H_{3n}}{(3n)^3}\cos\left(\frac{3n\pi}{3}\right)+\frac{H_{3n+1}}{(3n+1)^3}\cos\left(\frac{(3n+1)\pi}{3}\right)+\frac{H_{3n+2}}{(3n+2)^3}\cos\left(\frac{(3n+2)\pi}{3}\right)\right)=\frac{17\pi^4}{4860}$$

En exprimant H_{3n+1} et H_{3n+2} à l'aide de H_{3n} on obtient alors

$$\frac{13}{32}+\frac{1}{54}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1458n^6+5103n^5+6075n^4+3591n^3+1188n^2+216n+16)}{(3n+2)^3(3n+1)^3n^3}H_{3n}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(81n^4+27n^3-81n^2-63n-13)}{(3n+1)^4(3n+2)^4}=\frac{17}{4860}\pi^4$$

Un calcul se sommation (avec Maple, par exemple) donne

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(81n^4+27n^3-81n^2-63n-13)}{(3n+1)^4(3n+2)^4}=\frac{i\sqrt{3}}{6}L_2\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{7\pi^4}{1458}-\frac{\pi^2}{54}-\frac{13\zeta(3)}{72}+\frac{5\sqrt{3}\pi^3}{972}-\frac{\ln 2}{3}-\frac{i\sqrt{3}\pi^2}{216}-\frac{13}{32} \qquad (8)$$

Mais d'après la relation (6) on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(18n^2+18n+5\right)\left(H_{3n}+\dfrac{1}{3n+1}\right)}{(3n+2)^2(3n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(18n^2+18n+5\right)H_{3n}}{(3n+2)^2(3n+1)^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(18n^2+18n+5\right)}{(3n+2)^2(3n+1)^3} \quad (9)$$

$$= \frac{13}{36}\zeta(3)+\frac{\sqrt{3}\pi^3}{81} \quad (10)$$

Une évaluation Maple donnant

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(18n^2+18n+5\right)}{(3n+2)^2(3n+1)^3}=-\frac{i\sqrt{3}}{3}L_2\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{2\ln 2}{3}+\frac{\pi^2}{27}+\frac{13\zeta(3)}{36}+\frac{5\sqrt{3}\pi^3}{486}+\frac{i\sqrt{3}\pi^2}{108} \quad (11)$$

on obtient alors en combinant $(??)$, (8), (9) et (11)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(4374n^7+10206n^6+11664n^5+8262n^4+3861n^3+1188n^2+216n+16\right)H_{3n}}{(3n+2)^3(3n+1)^3n^3}=-\frac{19\pi^4}{270}+\frac{39\zeta(3)}{4}-\frac{2\sqrt{3}\pi^3}{9}$$

2.6 Avec $x=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

En utilisant l'égalité

$$L_2\left(\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=-L_2\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\pi^2}{18}-\frac{i\pi\ln(3)}{3}$$

et sa conjuguée, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}\ln^2(3)-\frac{5\pi^2}{72}$$

$$= -\frac{H_1}{1}-\frac{H_2}{2}+\frac{H_3}{3}-\frac{H_4}{4}-\frac{H_5}{5}+\frac{H_6}{6}-\ldots$$

dont la convergence est assurée par paquets.

En combinant avec (5) ,on obtient

$$\frac{\ln^2(3)}{4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n}\left(2\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)-5\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

2.7 Avec $x = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

2.7.1 Pour $k + p = 2$

On obtient avec f_1^1 les deux formules suivantes qui sont remarquables

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{48} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n 2^{\frac{n}{2}}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ &= \frac{H_1}{2} \\ &\quad -\frac{1}{3} \times \frac{H_3}{2^2} - \frac{1}{4} \times \frac{H_4}{2^2} - \frac{1}{5} \times \frac{H_5}{2^3} \\ &\quad +\frac{1}{7} \times \frac{H_7}{2^4} + \frac{1}{8} \times \frac{H_8}{2^4} + \frac{1}{9} \times \frac{H_9}{2^5} \\ &\quad -\frac{1}{11} \times \frac{H_{11}}{2^6} - \frac{1}{12} \times \frac{H_{12}}{2^6} - \frac{1}{13} \times \frac{H_{13}}{2^7} \\ &\quad +\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n 2^{\frac{n}{2}}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ &= +\frac{1}{1} \times \frac{H_1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{H_2}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{H_3}{2^2} \\ &\quad -\frac{1}{5} \times \frac{H_5}{2^3} - \frac{1}{6} \times \frac{H_6}{2^3} - \frac{1}{7} \times \frac{H_7}{2^4} \\ &\quad +\frac{1}{9} \times \frac{H_9}{2^5} + \frac{1}{10} \times \frac{H_{10}}{2^5} + \frac{1}{11} \times \frac{H_{11}}{2^6} \\ &\quad -\ldots\end{aligned}$$

et avec f_0^2, les deux égalités

$$\begin{aligned}\frac{\ln^2(2)}{8} - \frac{\pi^2}{96} - \frac{\pi \ln(2)}{8} - G &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^2}{2^{\frac{n}{2}}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ &= \frac{H_1^2}{2} \\ &\quad -\frac{H_3^2}{2^2} - \frac{H_4^2}{2^2} - \frac{H_5}{2^3} \\ &\quad +\frac{H_7^2}{2^4} + \frac{H_8^2}{2^4} + \frac{H_9^2}{2^5} \\ &\quad -\frac{H_{11}^2}{2^6} - \frac{H_{12}^2}{2^6} - \frac{H_{13}^2}{2^7} + \cdots\end{aligned}$$

$$\frac{\ln^2(2)}{8} - \frac{\pi^2}{96} + \frac{\pi \ln(2)}{8} + G = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^2}{2^{\frac{n}{2}}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Avec les fonctions g_p^k, on a

$$\begin{aligned}\frac{\pi\ln(2)}{8} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{(n+1)\,2^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)\\ &= \frac{H_1}{2\times 2}+\frac{H_2}{3\times 4}-\frac{H_4}{5\times 8}-\frac{H_5}{6\times 8}-\frac{H_6}{7\times 16}+\frac{H_8}{8\times 32}+...\end{aligned}$$

2.7.2 Avec $k+p=3$

La fonction g_0^3 donne immédiatement

$$-\frac{13}{16}\zeta(3)+\frac{\pi^2\ln(2)}{192}+\frac{\ln^3(2)}{48}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n^3}{2^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)$$

f_1^2 et f_2^1 donnent

$$\begin{aligned}\frac{35}{64}\zeta(3)-\frac{\pi G}{4} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n^2}{n2^{\frac{n}{2}}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\\ \zeta(3)-\frac{\pi^2\ln(2)}{96}-\frac{\pi G}{4} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n^2 2^{\frac{n}{2}}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

3 Sommes d'Euler

Si on définit $H_n^{(q)}=1+\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^q}+..+\frac{1}{n^q}$, on a la relation suivante avec les polylogarithmes

$$\sum_{n=1}^{+\infty}H_n^{(q)}x^n=\frac{L_q(x)}{1-x}$$

Qui provient du produit de Cauchy.
En intégrant on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n^{(2)}x^n}{n} &= \int_0^x\frac{L_2(t)}{t(1-t)\,dt}\\ &= -\ln^2(1-t)\ln(t)-2\ln(1-t)L_2(1-t)-\ln(1-t)L_2(t)+2L_3(1-t)+L_3(t)-2\zeta(3)\end{aligned}$$

ce qui donne la superbe formule

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{2^n n}=\frac{5}{8}\zeta(3)$$