Sur la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$.

G.Huvent
Gery.Huvent@ac-lille.fr

13 novembre 2002

On définit la suite $(u_n)_n$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} \text{ où } C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)\,!}.$$

Proposition 1 *La suite* $(u_n)_n$ *converge vers* 2

Preuve. *On montre facilement que la suite des coefficients du triangle de Pascal est croissante jusqu'au terme du milieu. En d'autres termes* $C_n^{k+1} \geq C_n^k$ *si* $k+1 \leq \dfrac{n}{2}$ *(Ceci parce que* $C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k$ *et* $\frac{n-k}{k+1} \geq 1 \Longleftrightarrow k \leq \frac{n-1}{2}$ *)*
On en déduit l'encadrement

$$\forall n \geq 2,\ 2 \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{C_n^1} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^2} = 2 + \frac{2}{n} + \frac{2\,(n-3)}{n\,(n-1)}$$

et le résultat annoncé.
Remarque : La suite $(u_n)_n$ *est décroissante à partir du rang 3. En effet* $\dfrac{1}{C_n^k} \geq \dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}$ *(Par la relation de Pascal), et* $\dfrac{1}{C_n^1} + \dfrac{1}{C_n^2} = \dfrac{n+1}{n\,(n-1)} \geq \dfrac{1}{C_{n+1}^1} + \dfrac{1}{C_{n+1}^2} + \dfrac{1}{C_{n+1}^3} = \dfrac{n^2+n+4}{n\,(n+1)\,(n-1)}$*. Ainsi* $u_n = 1 + \dfrac{1}{C_n^1} + \dfrac{1}{C_n^2} + \sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{C_n^k} \geq 1 + \dfrac{1}{C_{n+1}^1} + \dfrac{1}{C_{n+1}^2} + \dfrac{1}{C_{n+1}^3} + \sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}} = u_{n+1}$. ■

Proposition 2 *La suite* $(u_n)_n$ *vérifie l'équation de récurrence*

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2\,(n+1)} u_n$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
(2n+2)\,u_{n+1} &= 2n+2+2\sum_{k=0}^{n}\frac{k!\,(n+1-k)\,!}{n!}\\
&\underset{j=n-k}{=} 2n+2+\sum_{k=0}^{n}\frac{k!\,(n+1-k)\,!}{n!}+\sum_{j=0}^{n}\frac{(j+1)\,!\,(n-j)\,!}{n!}\\
&= 2n+2+\sum_{k=0}^{n}\frac{k!\,(n-k)\,!}{n!}\left((n+1-k)+(k+1)\right)\\
&= 2n+2+(n+2)\,u_n
\end{aligned}
$$

Remarque : On peut aussi constater que $\dfrac{n+2}{C_n^k}-\dfrac{2n+2}{C_{n+1}^k}=\dfrac{n-k}{C_n^{k+1}}-\dfrac{n-(k+1)}{C_n^k}$ *pour* $0\leq k<n$. *En sommant entre* 0 *et* $n-1$, *on trouve* $(n+2)\,(u_n-1)-(2n+2)\left(u_{n+1}-1-\frac{1}{n+1}\right)=-n$ *d'où le résultat.* ■

Proposition 3 *On a, pour* $n\geq 0$.

$$u_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$$

Preuve. *On résout la récurrence* $(2n+2)\,u_{n+1}=(n+2)\,u_n+2n+2$. *Pour cela, cherchons un facteur de sommation* a_n, *i.e. une suite* $(a_n)_n$ *telle que* $a_n\,(2n+2)=a_{n+1}\,(n+2)$.
Si l'on trouve une telle suite, on aura $a_n\,(2n+2)\,u_{n+1}=a_{n+1}\,(n+2)\,u_{n+1}=a_n\,(n+2)\,u_n+(2n+2)\,a_n$.
D'où en posant $v_n=a_nu_n$,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2\,(n+1)}{n+2}a_n$$

et par une somme télescopique, on en déduit facilement v_n.
On désire donc avoir $a_n\,(2n+2)=a_{n+1}\,(n+2)\iff a_{n+1}=2\frac{n+1}{n+2}a_n=4\frac{(n+1)n}{(n+2)(n+1)}a_{n-1}=\ldots=\frac{2^{n+1}}{n+2}a_0$.
On pose donc $a_n=\dfrac{2^n}{n+1}$, *alors* $v_{n+1}-v_n=\dfrac{2^{n+1}}{n+2}$ *et l'on en déduit le résultat annoncé.* ■

Proposition 4 *Au passage, on a prouvé que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}\underset{+\infty}{\sim}\frac{2^{n+1}}{n}$

Remarque 5 *En utilisant le fait que*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{C_n^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k-1}{k}$$

on en déduit que

$$\frac{2^{n+1}}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_n^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{C_n^k}{k}=H_n+\frac{2^{n+1}}{n+1}$$

où

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$