$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{4n}{2n}\binom{2n}{n}}{(2n+1)\,2^{6n+1}} = \frac{\arg\operatorname{sh} 1}{\arcsin 1}$$

Géry Huvent.

3 Avril 2008

Le point de départ denotre propos est le développement en série entière

$$\forall x \in [-1,1]\,,\ \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{4n}{2n}}{(2n+1)\,2^{4n}} x^{2n}$$

Cette égalité peut se vérifier facilement avec un logiciel de calcul formel comme Maple. Elle peut également se démontrer ainsi :

Si $x \in [0,1]$ on a

$$1+\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\
&= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{2x}
\end{aligned}$$

Mais on sait que

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)\,2^{2n}} x^{n+1}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \frac{1}{ux}\left(\left(1-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\binom{2n}{n}}{(n+1)\,2^{2n}}x^{n+1}\right) - \left(1-\frac{1}{2}\frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)\,2^{2n}}x^{n+1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)\,2^{2n}}\left(1-(-1)^{n+1}\right)x^n \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{4n}{2n}}{(2n+1)\,2^{4n}}x^{2n}
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité sur $[0,1]$.

Si on remplace x par $\sin t$ où $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos t}} = \frac{1}{\sqrt{2\cos^2 \dfrac{t}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos \dfrac{t}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\dbinom{4n}{2n}}{(2n+1)\, 2^{4n}} \sin^{2n} t$$

En intégrant entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, il vient alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos \dfrac{t}{2}} = 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\dbinom{4n}{2n}}{(2n+1)\, 2^{4n}} \sin^{2n} t dt$$

Mais

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\dbinom{4n}{2n}}{(2n+1)\, 2^{4n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\dbinom{4n}{2n}}{(2n+1)\, 2^{4n}} \times \frac{\pi}{2} \frac{\dbinom{2n}{n}}{2^{2n}} \\
&= \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\dbinom{4n}{2n}\dbinom{2n}{n}}{(2n+1)\, 2^{6n+1}}
\end{aligned}$$

d'où d'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{4n}{2n}\binom{2n}{n}}{(2n+1)\, 2^{6n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!}{(2n+1)!\,(n!)^2\, 2^{6n+1}} = \frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\dfrac{\pi}{2}} = \frac{\operatorname{arg\,sh} 1}{\arcsin 1}$$