A propos de la question 783 posée par Ramanujan dans le JIMS.

Huvent Géry

24 août 2010

1 Introduction

Entre 1911 et 1919 S.Ramanujan proposa au ‹‹JOURNAL OF THE INDIAN MATHEMATICAL SOCIETY ›› 58 problèmes au total. Parmi ces problèmes[1], certains peuvent être résolus par un étudiant de classe préparatoire. En voici trois exemples :
Question 723 (JIMS 7, p 240) : Si $[x]$ désigne la partie entière de x et $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\begin{aligned}\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{6}\right]+\left[\frac{n+4}{6}\right] &= \left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+3}{6}\right] \\ \left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right] &= \left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right] \\ \left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] &= \left[\sqrt{4n+2}\right]\end{aligned}$$

Question 260 (JIMS 3, p 43). Montrer que

$$1+2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n)^3-4n}=\frac{3}{2}\ln 2$$

La question 783 fournit un des résultats les plus élégants parmi ceux proposés par Ramanujan. On se propose d'en donner une preuve élémentaire.
Question 783 (JIMS 8,p 159) : Si

$$x=y^n-y^{n-1} \text{ et } J_n=\int_0^1\frac{\ln y}{x}dx$$

montrer que

$$\begin{aligned}J_0 &= \frac{\pi^2}{6},\ J_{\frac{1}{2}}=\frac{\pi^2}{10},\ J_1=\frac{\pi^2}{12},\ J_2=\frac{\pi^2}{15} \\ J_n+J_{\frac{1}{n}} &= \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

2 Reformulation du problème

La formulation de la question 783 est très imprécise. Il s'agit donc, avant tout de poser rigoureusement le problème.

2.1 Définition de $J(\alpha)$

2.1.1 Cas où $\alpha>0$

Soit $\alpha>0$, la fonction φ_α définie sur $[1,+\infty[$ par

$$\varphi_\alpha : \left|\begin{array}{c}[1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[\\ u \longmapsto u^\alpha-u^{\alpha-1}\end{array}\right.$$

réalise une bijection (strictement croissante) de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. Il suffit de calculer la dérivée qui vaut $\varphi_\alpha' : u \longmapsto u^{\alpha-2}(\alpha(u-1)+1)$. Pour simplifier les notations, posons $\varphi_\alpha^{-1}(1)=x(\alpha)$, qui est l'unique solution de $[1,+\infty[$ à l'équation

[1] La liste complète est fournie dans [Brendt]

$u^{\alpha}-u^{\alpha-1}=1$. Puisque $\varphi_{\alpha}(1)=0$, on a $\varphi_{\alpha}^{-1}([0,1])=[1,x(\alpha)]$.
La fonction $\ln\varphi_{\alpha}^{-1}$ est donc définie sur $[0,1]$, et on définit alors, sous reserve d'existence de l'intégrale

$$J(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln\varphi_{\alpha}^{-1}(v)}{v}dv$$

Le problème qui se pose est celui de la convergence en 0. On sait $\varphi_{\alpha}^{-1}(0)=1$, puisque $\varphi_{\alpha}'(x)=x^{\alpha-2}(\alpha(x-1)+1)\geq 1$ sur $[1,+\infty[$, on en déduit que φ_{α}^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et que $\left(\varphi_{\alpha}^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{\varphi_{\alpha}'(1)}=1$. Ainsi

$$\varphi_{\alpha}^{-1}(v)=1+v+\underset{v\to 0}{o}(v)\Longrightarrow\frac{\ln\varphi_{\alpha}^{-1}(v)}{v}\underset{v\to 0}{\sim}1$$

ce qui assure la convergence en 0 de l'intégrale qui définit $J(\alpha)$.

2.1.2 Définition de $J(0)$.

Pour $\alpha=0$, la fonction φ_0 se réduit à $u\longmapsto 1-\dfrac{1}{u}$ qui est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[0,1[$ (en d'autres termes $x(0)=+\infty$, car "$1-\dfrac{1}{+\infty}=1$"). La fonction $\ln\varphi_{\alpha}^{-1}$ est donc définie sur $[0,1[$ et l'on pose $J(0)=\displaystyle\int_{[0,1[}\frac{\ln\varphi_0^{-1}(v)}{v}dv$.

2.1.3 Calcul de $J(0)$ et de $J(1)$.

Un calcul élémentaire donne $\varphi_0^{-1}(v)=\dfrac{1}{1-v}$ d'où

$$J(0)=-\int_0^1\frac{\ln(1-v)}{v}dv=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{v^n}{(n+1)}dv$$

Puisque $\displaystyle\int_0^1\frac{v^{n+1}}{(n+1)}dv=\frac{1}{n+1}$, on en déduit que

$$J(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Remarque 1 *On admet le résultat classique* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$.

Remarque 2 *Le changement de variable* $u=\dfrac{1}{1-v}$ *dans* $\displaystyle-\int_0^1\frac{\ln(1-v)}{v}dv$ *donne l'égalité* $\displaystyle J(0)=\int_1^{+\infty}\frac{\ln u}{u(u-1)}du$.

De la même manière, puisque $\varphi_1:u\longmapsto u-1$, on a

$$J(1)=\int_0^1\frac{\ln(1+v)}{v}dv=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n v^n}{(n+1)}dv=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

2.2 Une autre expression de $J(\alpha)$.

Pour $\alpha>0$, le changement de variable $u=\varphi_{\alpha}^{-1}(v)\Longleftrightarrow v=u^{\alpha}-u^{\alpha-1}$ conduit à l'expression suivante pour $J(\alpha)$

$$J(\alpha)=\int_1^{x(\alpha)}\frac{\ln u}{u-1}\frac{\alpha(u-1)+1}{u}du$$

On décompose ensuite l'intégrale pour obtenir $\forall\alpha>0$

$$\begin{aligned}J(\alpha)&=\int_1^{x(\alpha)}\frac{\ln u}{u-1}\frac{\alpha(u-1)+1}{u}du=\alpha\int_1^{x(\alpha)}\frac{\ln u}{u}du+\int_1^{x(\alpha)}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)\ln u\,du\\&=(\alpha-1)\int_1^{x(\alpha)}\frac{\ln u}{u}du+\int_1^{x(\alpha)}\frac{\ln u}{u-1}du\underset{t=1-u}{=}\frac{\alpha-1}{2}\ln^2 x(\alpha)+\int_0^{1-x(\alpha)}\frac{\ln(1-t)}{t}dt\end{aligned}$$

Il s'agit alors de calculer $J\left(\frac{1}{2}\right)$ et de prouver la relation de Ramanujan

$$\forall \alpha > 0,\ J(\alpha) + J\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Remarque 3 *Pour* $\alpha = 0$, *l'expression* $J(\alpha) = \int_1^{x(\alpha)} \frac{\ln u}{u-1} \frac{\alpha(u-1)+1}{u} du$ *donne* $J(0) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u(u-1)} du$ *si l'on convient que* $x(0) = +\infty$.

3 Introduction au polylogarithme d'ordre 2.

3.1 Deux définitions du polylogarithme.

La dernière expression de $J(\alpha)$ fait apparaître l'intégrale $\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$, évaluée en $1 - x(\alpha)$. Pour des raisons que l'on comprendra par la suite, on préfère poser la définition suivante du polylogarithme d'ordre 2 :

Definition 4 *Pour* $x \in]-\infty, 1]$, *on définit la fonction* L_2, *dite polylogarithme d'orde* 2 *par*

$$L_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$$

L'intégrale est bien définie, la fonction $t \longmapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ étant prolongée par continuité en $t = 0$, et pour $x = 1$, $t \longmapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $]0, 1[$. On retiendra que la fonction L_2 est dérivable sur $]-\infty, 1]$ avec $L_2'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$.
Si l'on s'inspire du calcul de $J(0)$, on obtient facilement un développement en série entière de $L_2(x)$ pour $x \in [-1, 1]$, en effet :

Definition 5 *Pour* $x \in [-1, 1]$, *on définit la fonction* L_2, *dite polylogarithme d'orde* 2 *par*

$$L_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Puisque la série entière qui défini L_2 est absolument convergente sur $[-1, 1]$, elle est est dérivable sur $]-1, 1[$ de dérivée égale à

$$L_2'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

Ceci prouve que les deux définitions coïncidents sur $[-1, 1]$. En particulier, on a bien

$$L_2(0) = 0,\ L_2(1) = \frac{\pi^2}{6} = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt \text{ et } L_2(-1) = -\frac{\pi^2}{12} = \int_{-1}^0 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$$

3.1.1 La formule d'inversion.

Pour $x < 0$, les deux termes $L_2(x)$ et $L_2\left(\frac{1}{x}\right)$ sont définis. Si l'on dérive leur somme on obtient

$$L_2'(x) - \frac{1}{x^2} L_2'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x} = -\frac{\ln(-x)}{x}$$

On en déduit la formule d'inversion

Proposition 6

$$\forall x < 0,\ L_2(x) + L_2\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{\ln^2(-x)}{2}$$

4 Calcul de $J(\alpha)+J\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

A l'aide du polylogarithme, on obtient donc

$$\forall \alpha>0,\ J(\alpha)=\frac{\alpha-1}{2}\ln^2(x(\alpha))-L_2(1-x(\alpha))$$

Si l'on oublie, provisoirement, le calcul de $J(2)$, il s'agit de montrer que $J(\alpha)+J\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ est constant. Pour cela, on commence par relier $x\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ à $x(\alpha)$.

4.1 Une relation fonctionnelle pour la fonction $\alpha\longmapsto x(\alpha)$.

Proposition 7 *Pour $\alpha>0$,*

$$x\left(\frac{1}{\alpha}\right)=x(\alpha)^{\alpha}$$

Preuve *En effet*

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{\alpha}}-x^{\frac{1}{\alpha}-1} &= 1\Longleftrightarrow x^{\frac{1}{\alpha}}-x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=1\Longleftrightarrow y-y^{1-\alpha}=1 \\ \text{où } y &= x^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

La dernière équation s'écrit aussi, en multipliant par $y^{\alpha-1}$

$$y^{\alpha}-1=y^{\alpha-1}$$

Ainsi par unicité de la solution (car $y>1$), on a

$$y=x(\alpha)=x\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

▪

Remarque 8 *Pour $\alpha>0$, on a donc*

$$x(\alpha)\,x\left(\frac{1}{\alpha}\right)-x(\alpha)-x\left(\frac{1}{\alpha}\right)=x(\alpha)^{\alpha+1}-x(\alpha)-x(\alpha)^{\alpha}=x(\alpha)\left(x(\alpha)^{\alpha}-x(\alpha)^{\alpha-1}-1\right)=0$$

Ce qui signifie que la somme et le produit des deux solutions sur $[1,+\infty[$ des équations

$$\begin{aligned} x^{\alpha} &= x^{\alpha-1}+1 \\ x^{\frac{1}{\alpha}} &= x^{\frac{1}{\alpha}-1}+1 \end{aligned}$$

sont identiques.

4.1.1 La solution du problème.

On en déduit que

$$J\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\frac{1}{\alpha}-1}{2}\ln^2\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)-L_2\left(1-x\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)=\frac{\alpha-\alpha^2}{2}\ln^2(x(\alpha))-L_2\left(1-x(\alpha)^{\alpha}\right)$$

Mais puisque $x(\alpha)$ est solution de $x^{\alpha}-x^{\alpha-1}=1\Longleftrightarrow 1-x^{\alpha}=-x^{\alpha-1}$ d'où

$$J\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\alpha-\alpha^2}{2}\ln^2(x(\alpha))-L_2\left(-x(\alpha)^{\alpha-1}\right)$$

De même $x^{\alpha}-x^{\alpha-1}=1\Longleftrightarrow x^{\alpha-1}\left(x-1\right)=1\Longleftrightarrow 1-x=-\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ d'où

$$J\left(\alpha\right)=\frac{\alpha-1}{2}\ln^2\left(x\left(\alpha\right)\right)-L_2\left(-\frac{1}{x\left(\alpha\right)^{\alpha-1}}\right)$$

De manière à simplifier, on note x à la place de $x\left(\alpha\right)$, on a alors

$$J\left(\alpha\right)+J\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{\left(\alpha-1\right)^2}{2}\ln^2\left(x\right)-L_2\left(-x^{\alpha-1}\right)-L_2\left(-\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$$

Avec la formule d'inversion appliquée à $x=-x^{\alpha-1}<0$, on obtient

$$L_2\left(-x^{\alpha-1}\right)+L_2\left(-\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)=-\frac{\pi^2}{6}-\frac{\ln^2\left(x^{\alpha-1}\right)}{2}=-\frac{\pi^2}{6}-\frac{\left(\alpha-1\right)^2\ln^2\left(x\right)}{2}$$

Ce qui permet d'établir la relation de Ramnujan

$$\forall\alpha>0,\ J\left(\alpha\right)+J\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

5 Calcul de $J\left(\frac{1}{2}\right)$

Seul le calcul de $J\left(\frac{1}{2}\right)$, ou de $J\left(2\right)$ reste à réaliser. On peut déjà constater que $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{6}$, ce qui est cohérent avec la relation de Ramanujan.On a vu que $J\left(2\right)=\dfrac{2-1}{2}\ln^2\left(x\left(2\right)\right)-L_2\left(1-x\left(2\right)\right)$ où $x\left(2\right)$ est l'unique solution, dans $\left[1,+\infty\right[$, de $x^2-x=1$. Ainsi

$$x\left(2\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi \text{ le nombre d'or}$$

et $1-\phi=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=-\dfrac{1}{\phi}$, car $\phi^2=\phi+1$. Il s'agit donc de calculer $L_2\left(-\dfrac{1}{\phi}\right)$.

5.1 Relations fonctionnelles pour la fonction L_2

On commence par la formule d'Euler

Proposition 9 *Pour $x\in\left[0,1\right]$,*

$$L_2\left(x\right)+L_2\left(1-x\right)=\frac{\pi^2}{6}-\ln\left(x\right)\ln\left(1-x\right)$$

Preuve *Les deux membres sont dérivables sur $\left]0,1\right[$ et ont même dérivée. Le passage à la limite en $x=0$ fournit ensuite l'égalité.*

■

Puis la formule de duplication

Proposition 10 *Pour $x\in\left[-1,1\right]$,*

$$L_2\left(x\right)+L_2\left(-x\right)=\frac{1}{2}L_2\left(x^2\right)$$

Preuve *On peut travailler par dérivation, mais sur $\left[-1,1\right]$, on dispose d'un développement en série entière. On a donc*

$$L_2\left(x\right)+L_2\left(-x\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1+\left(-1\right)^n\right)x^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x^{2n}}{n^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)^2}=\frac{1}{2}L_2\left(x^2\right)$$

■

et pour finir, donnons la formule de Landen pour le polylogarithme

Proposition 11 *Pour $x<1$*

$$L_2(x)+L_2\left(\frac{x}{x-1}\right)=-\frac{1}{2}\ln^2(1-x)$$

Preuve *Avant tout, remarquons que si $x<1$, alors $\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}<1$, ainsi les deux termes de l'égalité on un sens. On prouve ensuite l'égalité par dérivation et à l'aide de la valeur en $x=0$.*

▪

5.2 Calcul de $L_2\left(-\frac{1}{\phi}\right)$

Avec $x=\dfrac{1}{\phi^2}$, la formule de Landen donne

$$L_2\left(\frac{1}{\phi^2}\right)+L_2\left(-\frac{1}{\phi}\right)=-\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1}{\phi}\right)=-\frac{1}{2}\ln^2(\phi)$$

Mais la formule d'Euler fournit

$$L_2\left(\frac{1}{\phi^2}\right)+L_2\left(\frac{1}{\phi}\right)=\zeta(2)-2\ln^2(\phi)$$

et la formule de duplication

$$L_2\left(\frac{1}{\phi}\right)+L_2\left(-\frac{1}{\phi}\right)=\frac{1}{2}L_2\left(\frac{1}{\phi^2}\right)$$

En combinant les trois résultats, on obtient

$$\begin{aligned}
L_2\left(-\frac{1}{\phi}\right) &= -\frac{\pi^2}{15}+\frac{1}{2}\ln^2(\phi)\\
L_2\left(\frac{1}{\phi^2}\right) &= \frac{2}{5}\zeta(2)-\ln^2(\phi)=\frac{\pi^2}{15}-\ln^2(\phi)\\
L_2\left(\frac{1}{\phi}\right) &= \frac{\pi^2}{10}-\ln^2(\phi)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$J(2)=\frac{\pi^2}{15}\text{ et }J\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{10}$$

6 Une généralisation[2] de la fonction J

Pour $\alpha>0$ et $p>0$, on définit $\varphi_{\alpha,p}:\left|\begin{array}{c}[1,+\infty[\longrightarrow[0,+\infty[\\ u\longmapsto u^\alpha-u^{\alpha-p}\end{array}\right.$ qui réalise une bijection (strictement croissante) de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. On pose alors $x(\alpha,p)=\varphi_\alpha^{-1}(1)$, l'unique solution de $[1,+\infty[$ à l'équation $u^\alpha-u^{\alpha-p}=1$. La fonction $\ln\varphi_{\alpha,p}^{-1}$ est donc définie sur $[0,1]$, et on définit alors,

$$J(\alpha,p)=\int_0^1\frac{\ln\varphi_{\alpha,p}^{-1}(v)}{v}dv$$

Le changement de variable $u=\left[\varphi_{\alpha,p}^{-1}(\ v)\right]^p\Longleftrightarrow v=u^{\frac{\alpha}{p}}-u^{\frac{\alpha}{p}-1}$ conduit à l'expression suivante pour $J(\alpha,p)$

$$\begin{aligned}
J(\alpha,p) &= \frac{1}{p^2}\int_1^{x(\alpha,p)^p}\frac{\ln u}{u-1}\frac{\alpha(u-1)+p}{u}du\\
&= \frac{1}{p}\int_1^{x(\alpha,p)^p}\frac{\ln u}{u-1}\frac{\frac{\alpha}{p}(u-1)+1}{u}du
\end{aligned}$$

Il est clair que $J(\alpha,1)=J(\alpha)$. En posant $x(0,p)=+\infty$, on récupère la valeur de $J(0,p)=\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(u)}{u(u-1)}du=\frac{\pi^2}{6p}$.

[2] Je ne sais pas si cette généralisation a déjà été envisagée.

6.1 A propos de la fonction $x \longmapsto x(\alpha, p)$.

Pour α et p strictement positifs, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x(\alpha,p) &= x(p,\alpha) && (1)\\ x(\alpha,p)^{\alpha}+x(\alpha,p)^{p} &= x(\alpha,p)^{\alpha+p} && (2)\\ x\left(\frac{1}{\alpha},p\right)^{p} &= x\left(\alpha,\frac{1}{p}\right)^{\alpha} \Longleftrightarrow x\left(\frac{1}{\alpha},p\right)^{\frac{1}{\alpha}} = x\left(\alpha,\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} && (3)\\ x\left(\frac{\alpha}{p},p\right) &= x(\alpha,1)^{\frac{\alpha}{p}} = x(\alpha p,p)^{\alpha} \Longrightarrow x(\alpha,1) = x(\alpha p,p)^{p} && (4)\\ x(\alpha,p) &= x\left(\frac{\alpha}{p},1\right)^{\frac{1}{p}} = x\left(\frac{p}{\alpha},1\right)^{\frac{1}{\alpha}} && (5)\\ x\left(\frac{p^2}{\alpha},p\right)^{p} &= x(\alpha,p)^{\alpha} = \frac{x(\alpha,p)^{p}}{f(\alpha,p)^{p}-1} && (6) \end{aligned}$$

Preuve On sait que $x(\alpha,p)^{\alpha} - x(\alpha,p)^{\alpha-p} = 1$, on a donc en multipliant par $x(\alpha,p)^{p-\alpha}$

$$x(\alpha,p)^{p} - 1 = x(\alpha,p)^{p-\alpha} \Longleftrightarrow x(\alpha,p)^{p} - x(\alpha,p)^{p-\alpha} = 1$$

Par unicité de la racine, ceci prouve (1). Puis

$$x(\alpha,p)^{\alpha} - x(\alpha,p)^{\alpha-p} = x(\alpha,p)^{-p} \times \left(x(\alpha,p)^{\alpha+p} - x(\alpha,p)^{\alpha}\right) = 1 \Longrightarrow x(\alpha,p)^{\alpha+p} - x(\alpha,p)^{\alpha} = x(\alpha,p)^{p}$$

Pour (3),

$$x\left(\frac{1}{\alpha},p\right)^{\frac{1}{\alpha}} - x\left(\frac{1}{\alpha},p\right)^{\frac{1}{\alpha}-p} = 1$$

Posons $z = x\left(\frac{1}{\alpha},p\right)^{\frac{p}{\alpha}} \Longleftrightarrow x\left(\frac{1}{\alpha},p\right) = z^{\frac{\alpha}{p}}$, d'où

$$z^{\frac{1}{p}} - z^{\frac{1}{p}-\alpha} = 1$$

Ainsi z est l'unique solution de $\varphi_{\frac{1}{p},\alpha}(u) = 1$ d'où $z = x\left(\frac{1}{p},\alpha\right) = x\left(\frac{1}{\alpha},p\right)^{\frac{p}{\alpha}} \Longleftrightarrow x\left(\frac{1}{\alpha},p\right)^{p} = x\left(\alpha,\frac{1}{p}\right)^{\alpha}$ avec (1)

On démontre ensuite (4), on a

$$x\left(\frac{p}{\alpha},p\right)^{\frac{p}{x}} - x\left(\frac{p}{\alpha},y\right)^{\frac{p}{\alpha}-p} = 1$$

Posons $z = x\left(\frac{p}{\alpha},p\right)^{p}$, alors

$$z^{\frac{1}{\alpha}} - z^{\frac{1}{\alpha}-1} = 1$$

ainsi z est l'unique solution de $\varphi_{\frac{1}{\alpha},1}(u) = 1$ d'où

$$x\left(\frac{p}{\alpha},y\right)^{p} = x\left(\frac{1}{\alpha},1\right) = x(\alpha,1)^{\alpha} \text{ d'après (3) d'où } x\left(\frac{p}{\alpha},y\right) = x(\alpha,1)^{\frac{\alpha}{p}}$$

Posons $z = x\left(\frac{p}{\alpha},p\right)^{\frac{1}{x}}$, alors

$$z^{p} - z^{p-\alpha p} = 1$$

d'où

$$x\left(\frac{p}{\alpha},p\right)^{\frac{1}{x}} = x(p,\alpha p) = x(\alpha p,p) \text{ d'où } x\left(\frac{p}{\alpha},p\right) = x(\alpha p,p)^{\alpha}$$

On a donc $x(\alpha,1) = x(\alpha p,p)^{p}$, si l'on remplace α par $\frac{\alpha}{p}$, on en déduit que $x\left(\frac{\alpha}{p},1\right) = x(\alpha,p)^{p}$. Puis $x(\alpha,p) = x(p,\alpha) = x\left(\frac{p}{\alpha},1\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Il reste la dernière égalité. Dans $x\left(\dfrac{p^2}{\alpha},p\right)$, on pose $\alpha = pu$, alors

$$x\left(\frac{p^2}{\alpha},p\right) = x\left(\frac{p}{u},p\right) = x\left(u\ p,p\right)^u = x\left(\alpha,p\right)^{\frac{\alpha}{p}}$$

d'où le résultat. On termine en utilisant l'égalité (2).

∎

6.2 Calcul de J(α, p)

On en déduit que $x\left(\alpha,p\right)^p = x\left(\dfrac{\alpha}{p},1\right)$ (relation (5)), ainsi

$$J\left(\alpha,p\right) = \frac{1}{p}\int_1^{x\left(\frac{\alpha}{p},1\right)} \frac{\ln u}{u-1}\,\frac{\frac{\alpha}{p}\left(u-1\right)+1}{u}du = \frac{1}{p}J\left(\frac{\alpha}{p},1\right) = \frac{1}{p}J\left(\frac{\alpha}{p}\right)$$

La relation de Ramnujan, s'écrit alors

$$pJ\left(p,\alpha\right) + \alpha J\left(\alpha,p\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Références

[Brendt] The problems Submitted by Ramanujan to the Journal of the Indian Mathematical Society, Contemporary Mathematics, Vol 00, 1997.
http ://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download ?doi=10.1.1.39.9228&rep=rep1&type=pdf