Sur les intégrales de Fresnel

G.Huvent
huvent-perso@wanadoo.fr

26 juin 2003

Soient

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cos\left(x^2\right) dx \\ G(t) &= \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin\left(x^2\right) dx \end{aligned}$$

Le changement de variable $x = \sqrt{u}$ transforme $G(t)$ en

$$G(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-tu} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \tag{1}$$

Pour $x > 0$, le changement de variable $y^2 = us$ dans l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xs}}{\sqrt{s}} ds$$

donne (en supposant connue l'intégrale de Gauss)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-us}}{\sqrt{s}} ds = \frac{1}{\sqrt{u\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{u}} \tag{2}$$

On déduit de (1) et (2) que

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-tu} \sin(u) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-us}}{\sqrt{s}} ds \right) du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-tu} \sin(u) \frac{e^{-us}}{\sqrt{s}} ds du \end{aligned}$$

Par intervertion des intégrations

$$G(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-(t+s)u} \sin(u) du \right) \frac{ds}{\sqrt{s}}$$

Mais

$$\int_0^{x} e^{-au} \sin(u) du = \frac{1}{1+a^2}$$

donc

$$G(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+(t+s)^2}\frac{ds}{2\sqrt{s}}\underset{u=\sqrt{s}}{=}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+\left(u^2+t\right)^2}$$

Reste à calculer la dernière intégrale par décomposition en éléments simples.
Avec

$$1+\left(u^2+t\right)^2=\left(u^2-u\sqrt{2\sqrt{1+t^2}-2t}+\sqrt{1+t^2}\right)\left(u^2+u\sqrt{2\sqrt{1+t^2}-2t}+\sqrt{1+t^2}\right)$$

On trouve

$$G(t)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}}$$

Le même genre de méthode donne

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\left(u^2+t\right)du}{1+\left(u^2+t\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{1+t^2}} \end{aligned}$$

Cette preuve est due à Leonard

Références

[1] LEONARD, L.E. : *More on Fresnel integrals.* Amer.Math.Monthly 95,1988,431-433