Un problème bien d'équerre.

G.Huvent

24 janvier 2006

1 Avant propos

Ce document devrez porter le titre suivant : "Méfiez vous des inspecteurs, ces gens là peuvent vous gâcher vos week-end". Un titre en guise d'avertissement qui mérite quelques explications. Les IPR, ne font pas que des inspections, ceci n'est pas vraiment un "scoop", ils leur arrivent aussi, au hasard d'une conversion, de vous glisser un petit problème de Maths qui va se révéler bien plus intéressant que de prime abord. Voila pourquoi, je vous le dis : Méfiez vous!.

Mais de quel problème s'agit-il ? Eh bien, vous avez tous une équerre et un pan de mur, faites glisser l'équerre sur le mur, comme indiqué sur la figure 1. Quelle est le lieu du sommet de l'angle droit de l'équerre ? A priori, rien de bien compliqué à cela. C'est juste, alors pourquoi tant de défiance vis à vis de nos vénérables inspecteurs ? L'histoire à une suite, car si la réponse à ce premier problème est assez simple, la question suivante est plus compliquée : Quel est le lieu d'un des points de l'équerre, ou, ce qui revient au même, quel est le lieu du sommet de l'équerre si cette dernière n'est pas d'équerre (i.e. si l'angle n'est pas droit) ? Dans ce cas, la courbe décrite est un arc d'ellipse, on le prouvera, mais comment déterminer facilement ses axes .... Bon week-end, et à bientôt. Car l'individu ne vous donne pas la réponse !

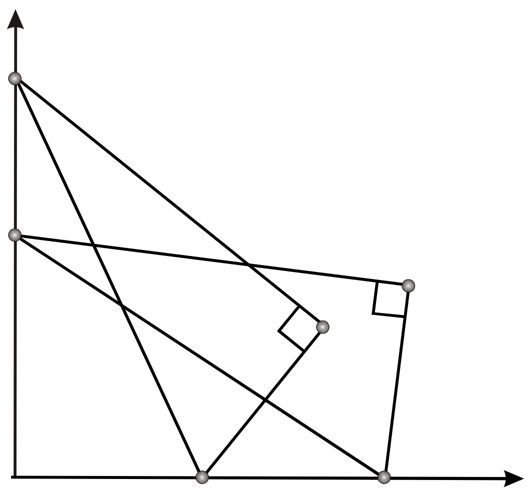


Figure 1

Avant de répondre à ces deux questions, j'avoue que je n'en veux pas à M.G. (Pour Mon Général) car le problème est plaisant et même s'il n'est pas si ardu que cela, il m'a donné beaucoup de plaisir mathématique !

2 Le cas de la véritable équerre

2.1 Construction de la figure avec un logiciel de géométrie dynamique

La première chose à faire est pour ce genre de problème est d'observer le chute de l'équerre. On peut alors se transformer en physicien, et armé d'un stroboscope, réaliser plusieurs expériences durant lesquelles on sacrifiera des équerres le long des murs des salles de nos classes. Il est sans doute plus raisonnable d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique et de construire la figure ci dessus, puis de l'animer. Cela s'avère en fait moins facile que prévu. Pour réaliser l'animation souhaitée, on procède ainsi :

Puisque AB est constant, le point M tel que $OAMB$ est un rectangle décrit un cercle de centre O. On trace donc un cercle centré en O, sur lequel on place un point M. Ce point M se projette en A et B sur deux diamètres perpendiculaires. Il reste ensuite à construire le point C. Puisque le triangle ABC est rectangle en C, le point C est sur le cercle de diamètre $[A, B]$. On trace ce cercle, sur le lequel on place le point C (voir fig.2). Il ne reste plus qu'a draguer le point M pour observer le lieu du point C. Si on désire construire une équerre non droite, on peut prendre un point D sur la médiane issue de C du triangle que l'on vient de construire (on verra que cette simple idée est très féconde).

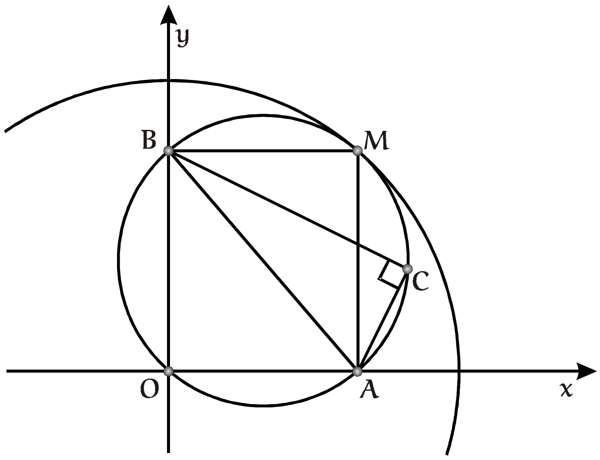


Figure 2

On constate alors que le lieu de C est un segment (voir fig.4) et celui de D une ellipse.

2.2 Détermination du lieu de C

Les notations sont celles de la figure ci dessous (fig.3), en particulier, les coordonnées sont celles dans le repère de cette figure. Soit M tel que $OAMB$ soit un rectangle, sans perte de généralité, on peut supposer que le rayon du cercle que M décrit, vaut 1. On repère le point M par l'angle θ, ainsi les coordonnées de A et B sont $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

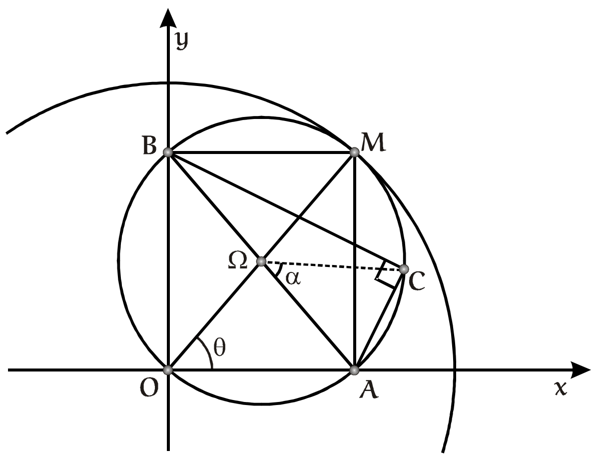


Figure 3

Soit I le milieu de $[A, B]$ (et donc de $[O, M]$) l'affixe ω de Ω est $\frac{e^{i\theta}}{2}$. On note α l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}}\right)$, alors le point C est l'image de A par la rotation de centre I et d'angle α. D'où, si a et c sont les affixes de A et C,

$$c - \omega = e^{i\alpha}(a - \omega)$$

or

$$a = \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

ce qui donne ;

$$\begin{aligned} c &= \frac{e^{i\theta}}{2} + e^{i\alpha}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} - \frac{e^{i\theta}}{2}\right) \\ &= \frac{e^{i\theta}}{2} + \frac{e^{i(\alpha-\theta)}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\cos\left(\frac{\theta-(\alpha-\theta)}{2}\right) e^{i\frac{\theta+(\alpha-\theta)}{2}} \\ &= \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

On constate donc que C se déplace sur la droite $\mathcal{D}$ qui fait un angle $\dfrac{\alpha}{2}$ avec (OA).

Remarque 1 *Ce résultat n'est pas surprenant quand on connaît le théorème de l'angle au centre dans un cercle. En effet, O, A, B, C sont sur un même cercle, le segment $[A, C]$ est vu sous l'angle α du centre Ω de ce cercle. Ce même segment est donc vu sous un angle $\dfrac{\alpha}{2}$ du point O qui est fixe. On en déduit que l'angle $\left(\widehat{OA, OC}\right)$ vaut $\dfrac{\alpha}{2}$. Le lieu de C est donc inclus dans la droite $\mathcal{D}$.*

Mais le lieu de C n'est pas toute la droite $\mathcal{D}$! Si l'équerre tombe, θ varie de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$, et $\theta - \dfrac{\alpha}{2}$ de $-\dfrac{\alpha}{2}$ à $\dfrac{\pi-\alpha}{2}$. Le point C décrit alors un segment inclus dans $\mathcal{D}$ délimité par les points pour lesquels $\cos\left(\theta - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ prend ses valeurs extrêmes. Compte tenu du schéma, α est implicitement entre 0 et π, ainsi $\cos\left(\theta - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ prend sa valeur maximale en $\theta = \dfrac{\alpha}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, le point correspondant est le point d'intersection, de $\mathcal{D}$ et du cercle grand cercle. La valeur minimale est atteinte au bord, et vaut soit $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ soit $\cos\left(\dfrac{\pi-\alpha}{2}\right) = \sin\dfrac{\alpha}{2}$ suivant la position de $\dfrac{\alpha}{2}$ par rapport à $\dfrac{\pi}{4}$ i.e. de α par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$.

En conclusion, si $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, le lieu de C est le segment $[K, L]$ où K et L ont pour affixe respective, $e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $\sin\dfrac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$. Si $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$, le lieu de C est le segment $[K, L]$ où K et L ont pour affixe respective, $e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $\cos\dfrac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

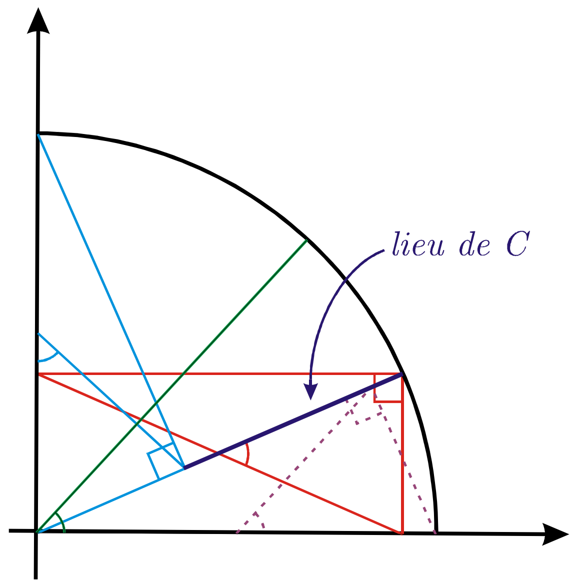


Figure 4

3 Mise en place des techniques : lieu de l'isobarycentre

Avant de lancer dans l'étude du lieu d'un point quelconque, examinons le cas du lieu de l'isobarycentre d'une équerre. Cette étude permet de mettre en place les techniques et de comprendre les phénomènes.
Pour simplifier, on généralise le problème sous la forme suivante : le point M décrit le cercle trigonométrique, soit A et B les projetés de M sur les axes Ox et Oy. Sur le segment $[A, B]$, on construit un triangle rectangle ABC, tel que $\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}} = \alpha$ où Ω est le milieu de $[A, B]$. Quel est le lieu du centre de gravité du triangle ABC ? Les coordonnées de A, B et C sont

$$A : \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} , \ B : \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} , \ C : \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\theta + \cos(\alpha - \theta)}{2} \\ \dfrac{\sin\theta + \sin(\alpha - \theta)}{2} \end{pmatrix}$$

les coordonnées du centre de gravité G de ABC sont donc

$$G : \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos\alpha}{6}\right)\cos\theta & + & \dfrac{\sin\alpha}{6}\sin\theta \\ \dfrac{\sin\alpha}{6}\cos\theta & + & \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos\alpha}{6}\right)\sin\theta \end{pmatrix}$$

Pour déterminer le lieu de G, on inverse le système précédent et on exprime $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de x_G et y_G. Le système, d'inconnue $\cos\theta$ et $\sin\theta$

$$\begin{cases} x_G = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos\alpha}{6}\right)\cos\theta + \dfrac{\sin\alpha}{6}\sin\theta \\ y_G = \dfrac{\sin\alpha}{6}\cos\theta + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos\alpha}{6}\right)\sin\theta \end{cases}$$

a pour déterminant

$$\begin{vmatrix} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos\alpha}{6}\right) & \dfrac{\sin\alpha}{6} \\ \dfrac{\sin\alpha}{6} & \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos\alpha}{6}\right) \end{vmatrix} = \frac{2}{9}$$

Les formules de Cramer donnent donc

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{9}{2}\begin{vmatrix} x_G & \dfrac{\sin\alpha}{6} \\ y_G & \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos\alpha}{6}\right) \end{vmatrix} = \left(\frac{9}{4} - \frac{3\cos\alpha}{4}\right)x_G - \frac{3\sin\alpha}{4}y_G \\ \sin\theta &= \frac{9}{2}\begin{vmatrix} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos\alpha}{6}\right) & x_G \\ \dfrac{\sin\alpha}{6} & y_G \end{vmatrix} = -\frac{3\sin\alpha}{4}x_G + \left(\frac{9}{4} + \frac{3\cos\alpha}{4}\right)y_G \end{aligned}$$

On peut donc affirmer que puisque $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on a

$$\left(\left(\frac{9}{4} - \frac{3\cos\alpha}{4}\right)x_G - \frac{3\sin\alpha}{4}y_G\right)^2 + \left(-\frac{3\sin\alpha}{4}x_G + \left(\frac{9}{4} + \frac{3\cos\alpha}{4}\right)y_G\right)^2 = 1$$

Réciproquement, si x et y vérifient

$$\left(\left(\frac{9}{4} - \frac{3\cos\alpha}{4}\right)x - \frac{3\sin\alpha}{4}y\right)^2 + \left(-\frac{3\sin\alpha}{4}x + \left(\frac{9}{4} + \frac{3\cos\alpha}{4}\right)y\right)^2 = 1$$

il existe θ tel que $\cos\theta = \dfrac{3}{4}\left[(3 - \cos\alpha)x - y\sin\alpha\right]$ et $\sin\theta = \dfrac{3}{4}\left[-x\sin\alpha + (3 + \cos\alpha)y\right]$ et le point de coordonnées (x, y) est l'isobarycentre du triangle ABC pour ce paramètre θ.

En conclusion, le lieu de G est la conique d'équation

$$\left(\left(\frac{9}{4}-\frac{3\cos\alpha}{4}\right)x-\frac{3\sin\alpha}{4}y\right)^2+\left(-\frac{3\sin\alpha}{4}x+\left(\frac{9}{4}+\frac{3\cos\alpha}{4}\right)y\right)^2=1$$

En développant cette expression on obtient

$$(45-27\cos\alpha)\,x^2-54\sin\alpha xy+(45+27\cos\alpha)\,y^2=8$$

On peut calculer $\Delta=(-54\sin\alpha)^2-4\times(45-27\cos\alpha)\times(45+27\cos\alpha)=-5184$ on a donc une ellipse. On effectue ensuite une rotation du repère d'angle $\varphi=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{54\sin\alpha}{(45-27\cos\alpha)-(45+27\cos\alpha)}=\dfrac{\alpha}{2}$, si (X,Y) sont les coordonnées dans le repère tourné de l'angle φ, on a

$$\begin{cases} x= & \cos\dfrac{\alpha}{2}X-\sin\dfrac{\alpha}{2}Y\\[2ex] y= & \sin\dfrac{\alpha}{2}X+\cos\dfrac{\alpha}{2}Y\end{cases}$$

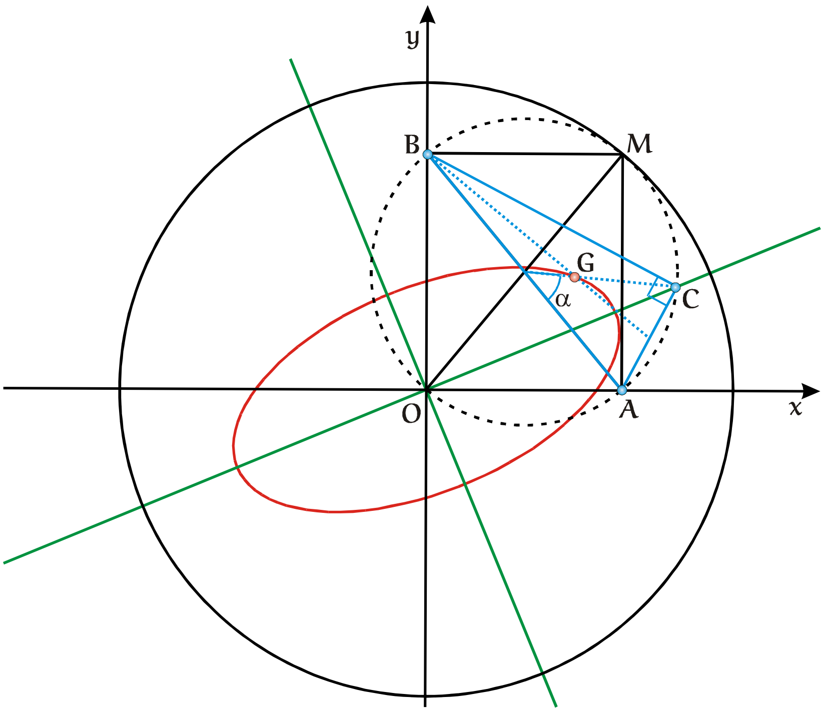
d'où

$$\begin{multline}(45-27\cos\alpha)\left(\cos\frac{\alpha}{2}X-\sin\varphi\frac{\alpha}{2}Y\right)^2\\ -54\sin\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2}X-\sin\frac{\alpha}{2}Y\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}X+\cos\frac{\alpha}{2}Y\right)\\ +(45+27\cos\alpha)\left(\sin\frac{\alpha}{2}X+\cos\frac{\alpha}{2}Y\right)^2=8\quad(*)\end{multline}$$

En développant $(*)$, on obtient

$$\frac{X^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=1$$

On a donc une ellipse, l'axe focal fait un angle de $\dfrac{\alpha}{2}$ avec Ox, le demi grand axe vaut $\dfrac{2}{3}$, le demi petit axe vaut $\dfrac{1}{3}$.



Si on revient au problème initial d'une équerre qui tombe, il faut alors se limiter à $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient donc un arc d'ellipse uniquement.

4 Cas général, lieu d'un point quelconque ou du sommet d'une équerre non droite

On considère maintenant un point quelconque de l'équerre ou plutôt un triangle ABD non droit. On cherche alors le lieu de D lorsque M décrit le cercle trigonométrique. L'idée est de considérer le point D comme le barycentre des sommets ABC d'un triangle rectangle. Cela va nous laisser un degré de liberté sur le sommet C que l'on peut prendre où l'on veut sur le cercle de diamètre $[A, B]$. On verra qu'il y a un choix qui rend les calculs abordables.
On prend le problème à l'envers, on choisit, dans un premier temps, une équerre droite ABC et on écrit que D est le barycentre de A, B et C avec les coefficients u, v et w tels que $u + v + w = 1$. Les coordonnées de D sont alors

$$D : u \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\theta + \cos(\alpha - \theta)}{2} \\ \dfrac{\sin\theta + \sin(\alpha - \theta)}{2} \end{pmatrix}$$

4.1 Analyse du problème avec Maple

On utilise les mêmes techniques que pour le lieu de l'isobarycentre de ABC, on exprime les coordonnées x_D et y_D du point D en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. On obtient alors un système que l'on peut "voir" comme un système dont les inconnues sont $\cos\theta$ et $\sin\theta$. On résout alors formellement ce système avec le logiciel Maple. La session suivante réalise ce calcul :

```
> eqxd:=xd=u*cos(theta)+w/2*expand((cos(theta)+cos(alpha-theta)));
```

$$eqxd := xd = u\cos(\theta) + \frac{1}{2} w\,(\cos(\theta) + \cos(\alpha)\cos(\theta) + \sin(\alpha)\sin(\theta))$$

```
> eqyd:=yd=v*sin(theta)+w/2*expand((sin(theta)+sin(alpha-theta)));
```

$$eqyd := yd = v\sin(\theta) + \frac{1}{2} w\,(\sin(\theta) + \sin(\alpha)\cos(\theta) - \cos(\alpha)\sin(\theta))$$

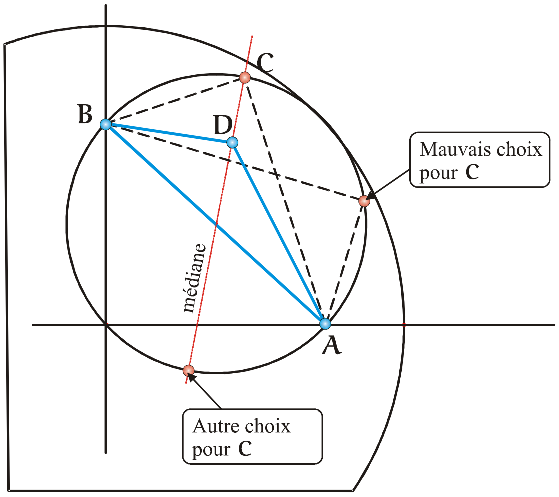
```
> sol:=solve({eqxd,eqyd},{cos(theta),sin(theta)});
```

$$sol := \{\sin(\theta) = \frac{2\,(xd\,w\sin(\alpha) - 2\,yd\,u - yd\,w - yd\,w\cos(\alpha))}{-4\,u\,v - 2\,u\,w + 2\,u\,w\cos(\alpha) - 2\,w\,v - w^2 - 2\,w\cos(\alpha)\,v + w^2\cos(\alpha)^2 + w^2\sin(\alpha)^2}, \cos(\theta) = \frac{2\,(-2\,v\,xd - xd\,w + w\cos(\alpha)\,xd + yd\,w\sin(\alpha))}{-4\,u\,v - 2\,u\,w + 2\,u\,w\cos(\alpha) - 2\,w\,v - w^2 - 2\,w\cos(\alpha)\,v + w^2\cos(\alpha)^2 + w^2\sin(\alpha)^2}\}$$

```
> sol:=simplify(sol);
```

$$sol := \{\sin(\theta) = \frac{xd\,w\sin(\alpha) - 2\,yd\,u - yd\,w - yd\,w\cos(\alpha)}{u\,w\cos(\alpha) - w\cos(\alpha)\,v - 2\,u\,v - u\,w - w\,v}, \cos(\theta) = \frac{-2\,v\,xd - xd\,w + w\cos(\alpha)\,xd + yd\,w\sin(\alpha)}{u\,w\cos(\alpha) - w\cos(\alpha)\,v - 2\,u\,v - u\,w - w\,v}\}$$

Le calcul précédent est un calcul formel qui ne tient pas compte des cas particulier (cas où le dénominateur est nul), mais on constate cependant que l'on peut simplifier le résultat en choisissant C de manière à avoir $u = v$. Cela revient à prendre C à l'intersection de la médiane issue de D et du cercle de diamètre $[A, B]$.
Dans ce cas, le résultat se simplifie en (on n'oublie pas que $u + v + w = 1$) :




```
> sol:=simplify(subs({v=u,w=1-2*u},sol));
```

$$sol := \{\sin(\theta) = -\frac{1}{2}\frac{-xd\sin(\alpha)+2\,xd\sin(\alpha)\,u+yd+yd\cos(\alpha)-2\,yd\cos(\alpha)\,u}{u\,(u-1)},$$
$$\cos(\theta) = -\frac{1}{2}\frac{xd-\cos(\alpha)\,xd+2\cos(\alpha)\,xd\,u-yd\sin(\alpha)+2\,yd\sin(\alpha)\,u}{u\,(u-1)}\}$$

Il ne semble y avoir que deux cas particuliers à traiter, lorsque $u = 0$ et lorsque $u = 1$. On le vérifie en calculant le déterminant du système en les inconnues $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

```
> collect(eqxd,{cos(theta),sin(theta)});
```

$$xd = \left(u+\frac{1}{2}w\,(1+\cos(\alpha))\right)\cos(\theta)+\frac{1}{2}w\sin(\alpha)\sin(\theta)$$

```
> collect(eqyd,{cos(theta),sin(theta)});
```

$$yd = \frac{1}{2}w\sin(\alpha)\cos(\theta)+\left(v+\frac{1}{2}w\,(1-\cos(\alpha))\right)\sin(\theta)$$

```
> (u+1/2*w*(1+cos(alpha)))*(v+1/2*w*(1-cos(alpha)))-(1/2*w*sin(alp
ha))^2;
```

$$\left(u+\frac{1}{2}w\,(1+\cos(\alpha))\right)\left(v+\frac{1}{2}w\,(1-\cos(\alpha))\right)-\frac{1}{4}w^2\sin(\alpha)^2$$

```
> subs({v=u,w=1-2*u},%);
```

$$\left(u+\frac{1}{2}(1-2\,u)\,(1+\cos(\alpha))\right)\left(u+\frac{1}{2}(1-2\,u)\,(1-\cos(\alpha))\right)-\frac{1}{4}(1-2\,u)^2\sin(\alpha)^2$$

```
> simplify(%);
```

$$u-u^2$$

On laisse provisoirement l'étude des cas particuliers. Ayant exprimé $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de x_D et y_D, on utilise la relation $\cos^2+\sin^2=1$ pour en déduire l'équation du lieu de D (la réciproque se fait comme pour l'isobarycentre).

```
> eqcon:=subs(sol,cos(theta)^2+sin(theta)^2=1);
```

$$eqcon := \frac{1}{4}\frac{(xd-\cos(\alpha)\,xd+2\cos(\alpha)\,xd\,u-yd\sin(\alpha)+2\,yd\sin(\alpha)\,u)^2}{u^2\,(u-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{(-xd\sin(\alpha)+2\,xd\sin(\alpha)\,u+yd+yd\cos(\alpha)-2\,yd\cos(\alpha)\,u)^2}{u^2\,(u-1)^2}=1$$

```
> eqcon:=collect(%,{xd,yd});
```

$$eqcon := \left(\frac{1}{4}\frac{(1-\cos(\alpha)+2\,u\cos(\alpha))^2}{u^2\,(u-1)^2}+\frac{1}{4}\frac{(-\sin(\alpha)+2\sin(\alpha)\,u)^2}{u^2\,(u-1)^2}\right)xd^2+\left(\frac{1}{2}\frac{(-\sin(\alpha)+2\sin(\alpha)\,u)\,(1-\cos(\alpha)+2\,u\cos(\alpha))}{u^2\,(u-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{(-2\,u\cos(\alpha)+1+\cos(\alpha))\,(-\sin(\alpha)+2\sin(\alpha)\,u)}{u^2\,(u-1)^2}\right)yd\,xd+\left(\frac{1}{4}\frac{(-\sin(\alpha)+2\sin(\alpha)\,u)^2}{u^2\,(u-1)^2}+\frac{1}{4}\frac{(-2\,u\cos(\alpha)+1+\cos(\alpha))^2}{u^2\,(u-1)^2}\right)yd^2=1$$

```
> eqcon:=map(simplify,lhs(%))=1;
```

$$eqcon := \frac{1}{2}\frac{(1-\cos(\alpha)+2\,u\cos(\alpha)+2\,u^2-2\,u)\,xd^2}{u^2\,(u-1)^2}+\frac{\sin(\alpha)\,(-1+2\,u)\,yd\,xd}{u^2\,(u-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{(1-2\,u\cos(\alpha)+\cos(\alpha)+2\,u^2-2\,u)\,yd^2}{u^2\,(u-1)^2}=1$$

Le lieu de D est donc une conique centrée en O. Afin d'obtenir son équation réduite, il convient de faire une rotation d'un angle $\arctan\dfrac{b}{c-a}$ où a,b et c sont les coefficients de x_D^2, x_Dy_D et y_D^2 respectivement. On déterminer l'angle de la rotation avec Maple

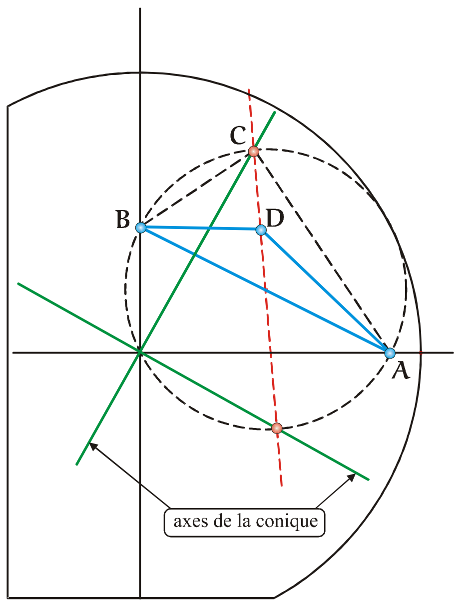
```
> 1/2*coeff(lhs(%),yd,1)/xd/(coeff(lhs(%),xd,2)-coeff(lhs(%),yd,2)
);
```

$$\frac{1}{2}\sin(\alpha)\,(-1+2\,u)\Big/\left(u^2\,(u-1)^2\left(\frac{1}{2}\frac{1-\cos(\alpha)+2\,u\cos(\alpha)+2\,u^2-2\,u}{u^2\,(u-1)^2}-\frac{1}{2}\frac{1-2\,u\cos(\alpha)+\cos(\alpha)+2\,u^2-2\,u}{u^2\,(u-1)^2}\right)\right)$$

```
> factor(%);
```

$$\frac{1}{2}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Il vaut donc $\frac{\alpha}{2}$! Pour résumer, on construit le point C à l'intersection de la médiane issue de D et du cercle de diamètre $[A, B]$. Le point O est le centre de la conique, les axes de la conique sont la droite (OC) et sa perpendiculaire passant par O (ceci d'après le théorème de l'angle au centre).



Il reste à effectuer le changement de repère pour obtenir l'équation réduite :

```
> subs({xd=cos(alpha/2)*X-sin(alpha/2)*Y,yd=sin(alpha/2)*X+cos(alp
  ha/2)*Y},eqcon);
```

$$\frac{1}{2}\frac{(1-\cos(\alpha)+2\,u\cos(\alpha)+2\,u^2-2\,u)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)X-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)Y\right)^2}{u^2\,(u-1)^2}$$
$$+\frac{\sin(\alpha)\,(-1+2\,u)\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)X+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)Y\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)X-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)Y\right)}{u^2\,(u-1)^2}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(1-2\,u\cos(\alpha)+\cos(\alpha)+2\,u^2-2\,u)\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)X+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)Y\right)^2}{u^2\,(u-1)^2}=1$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{Y^2-2\,u\,Y^2+u^2\,Y^2+u^2\,X^2}{u^2\,(u-1)^2}=1$$

```
> collect(%,{X,Y});
```

$$\frac{X^2}{(u-1)^2}+\frac{(1-2\,u+u^2)\,Y^2}{u^2\,(u-1)^2}=1$$

```
> map(simplify,lhs(%))=1;
```

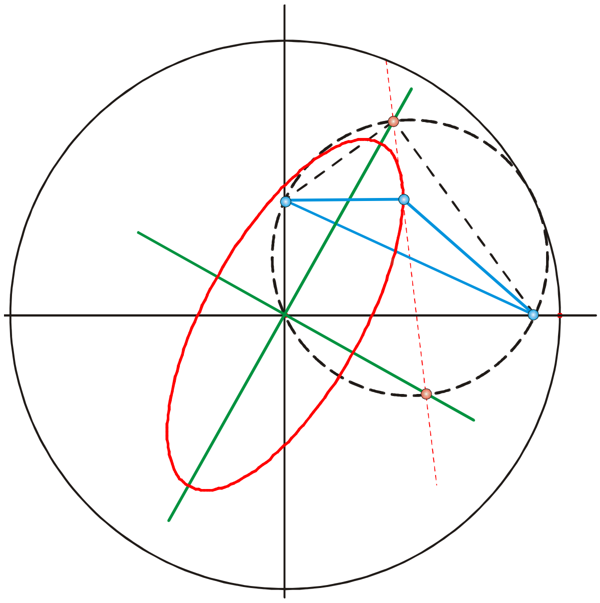
$$\frac{X^2}{(u-1)^2}+\frac{Y^2}{u^2}=1$$

Il reste à examiner les deux cas particuliers. Si $u = 0$ alors $D = C$ et on sait déjà que D décrit un diamètre du cercle. Si $u = 1$ alors $\dfrac{D+C}{2} = \dfrac{A+B}{2}$, D est donc le point diamétralement opposé au point précédent (c'est l'autre point d'intersection de la médiane et du cercle), il décrit alors le diamètre perpendiculaire au diamètre précédent.

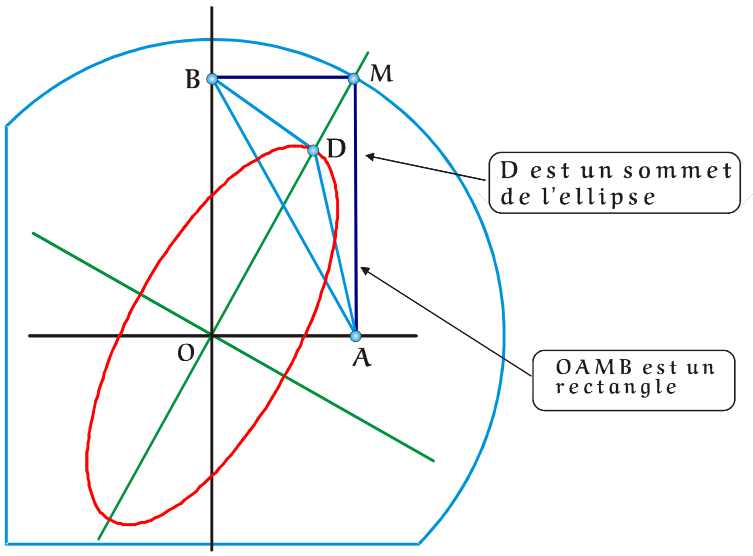
4.2 Synthèse des résultats

Le lieu du sommet D d'une équerre non droite (ou le lieu d'un point quelconque d'une équerre droite, en particulier un point d'un des côtés). est une ellipse (ou un arc d'ellipse si on se limite à une équerre qui tombe le long d'un mur). On obtient les axes de l'ellipse de la manière suivante :

On trace la médiane issue de D, elle coupe le cercle de diamètre $[A, B]$ en deux points que l'on nomme C et C'. Les axes de la conique sont les droites OC et OC'.



On obtient les sommets de l'ellipse en procédant ainsi : Les axes de l'ellipse coupent le grand cercle en quatre points. Si M est tel que $OAMB$ soit un rectangle, lorsque M coïncide avec un de ces quatre point, D est en un des sommets de l'ellipse (la diagonale du rectangle devient la médiane....).



5 Complèments[1]

5.1 Lieu de C par les propriétés angulaires du cercle

On peut déterminer directement le lieu du point C pour une véritable équerre en utilisant les théorèmes de l'angle inscrit, de l'angle au centre et la formule d'Al Kaschi. D'après le théorème de l'angle au centre (c.f. remarque 1), on sait que le lieu de C est inclus dans la droite passant par O et faisant un angle de $\frac{\alpha}{2}$ avec (OA).

5.2 Lieu d'un point de AB

Dans le cas du lieu d'un point de la droite (AB) ,on peut très facilement prouver qu'il s'agit d'une ellipse. En effet si $D \in (AB)$, on écrit que $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB}$,les coordonnées de D sont alors

$$D : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)\cos\theta \\ \lambda \sin\theta \end{pmatrix}$$

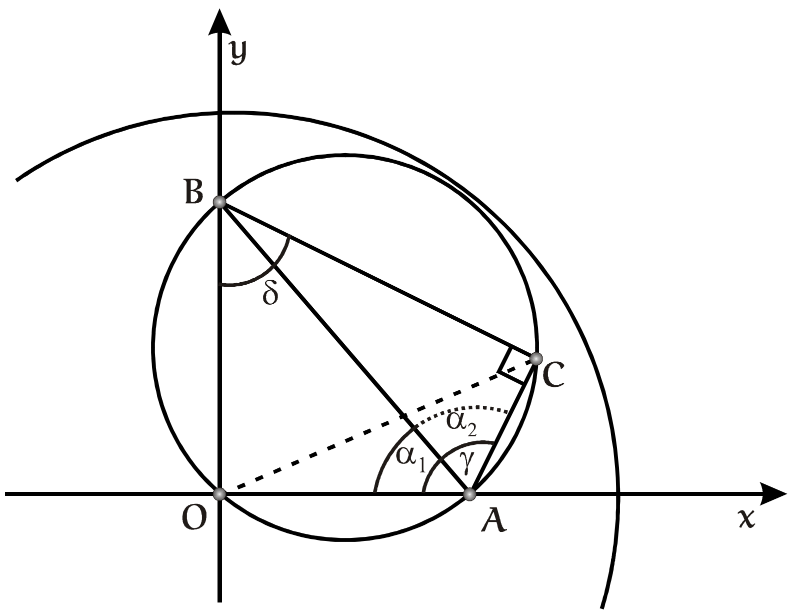
Si D n'est ni en A, ni en B, ses coordonnées vérifient

$$\frac{x^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$$

Le point D décrit est donc sur une ellipse dont les axes sont parallèles à OA et OB. Réciproquement, si on se limite à une équerre qui tombe le long d'un mur, on obtient un quart d'ellipse (qui correspond à $x \geq 0$ et $y \geq 0$).

5.3 Une preuve élémentaire du lieu de C

A l'aide du théorème de l'angle au centre, on sait que le lieu de C est inclus dans la droite $\mathcal{D}$ (c.f. remarque 1). Avec les notations de la figure ci dessous, on a



$$\begin{aligned} OC^2 &= OA^2 + AC^2 - 2OA \times AC \times \cos\gamma \\ OC^2 &= OB^2 + BC^2 - 2OB \times BC \times \cos\delta \end{aligned}$$

[1]Ces approches, immédiates, m'ont été communiquées par Michel Gouy, IPR de Mathématiques.

d'où, en faisant la demi-somme

$$OC^2 = \frac{OA^2 + OB^2 + AC^2 + BC^2}{2} - OA \times AC \times \cos\gamma - OB \times BC \times \cos\delta$$

D'après le théorème de Pythagore et de l'angle inscrit, on a $OA^2 + OB^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2$ et $\gamma = \delta + \pi$. Ainsi

$$OC^2 = AB^2 - \cos\delta\,(OA \times AC - OB \times BC)$$

Or

$$\frac{OA}{AB} = \sin\alpha_1 \qquad \frac{AC}{AB} = \sin\alpha_2$$

$$\frac{OB}{AB} = \cos\alpha_1 \qquad \frac{BC}{AB} = \cos\alpha_2$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} OC^2 &= AB^2 - \cos\delta AB^2\,(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - \cos\alpha_1\cos\alpha_2) \\ &= AB^2\,(1 + \cos\delta\cos(\alpha_1 + \alpha_2)) \\ &= AB^2\left(1 - \cos^2\delta\right) \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $\delta = \frac{\pi}{2} - \theta + \frac{\alpha}{2}$ d'après le théorème de l'angle au centre, on retrouve bien le résultat du paragraphe 2.2.