Quelques calculs d'intégrales

G.Huvent

3 septembre 2006

Résumé

On présent ici des formes closes pour quelques intérgrales. Le calcul des sommes d'Euler (ou des sommes analogues) ayant parfois un lien direct avec ces intégrales.

Les notations utilisés sont celles du document intitulé : "Sommes d'Euler et anaolgues". En particulier, on pose $f_p^k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^k}{n^p} x^n$ et $g_p^k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^k}{(n+1)^p} x^{n+1}$. On utilisera les résultat de ce document.

1 Applications aux calculs d'intégrales

1.1 Calcul de $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos x)\ln(\sin(x))}{\cos x \sin x} dx$

L'existence de cette intégrale ne pose aucun problème. Le changement de variable $u = \tan t$ conduit à

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(\cos^2 x\right)\ln\left(1-\cos^2(x)\right)}{\tan x}\frac{dx}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)-2\ln t\right)\ln\left(1+t^2\right)}{t}dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^2\left(1+t^2\right)}{t}dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln\left(1+t^2\right)\ln t}{t}dt
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln\left(1+t^2\right)\ln t}{t}dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}\ln t}{(n+1)}dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+1}\ln t}{(n+1)}dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4(n+1)^3} \text{ par convergence dominée} \\
&= -\frac{3\zeta(3)}{16}
\end{aligned}$$

Puis

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(1+t^2)}{t}\mathrm{d}t \underset{u=t^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{1+u}\ln u\mathrm{d}u \text{ en intégrant par parties (dériver } \ln^2(1+u)) \quad (1)$$

$$= -\int_0^1 \left[-f_0^1(-u)\right]\ln u\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n H_n u^n \ln u\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n H_n \int_0^1 u^n \ln u\mathrm{d}u$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{(n+1)^2} \text{ car la série } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^2} \text{ converge}$$

$$= g_2^1(-1) = \frac{\zeta(3)}{8}$$

On a ainsi prouvé que

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos x)\ln(\sin(x))}{\cos x \sin x}\mathrm{d}x = \frac{\zeta(3)}{8} \quad (2)$$

ce qui donne immédiatement (utiliser $u = \frac{\pi}{2} - t$ et couper l'intégrale en deux)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos x)\ln(\sin(x))}{\cos x \sin x}\mathrm{d}x = \frac{\zeta(3)}{4} \quad (3)$$

Remarque 1 *On peut aussi calculer* $\int_0^1 \frac{\ln^2(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$ *en posant* $z = \frac{1}{1+u}$, *on obtient alors* $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^2 z}{z(1-z)}\,\mathrm{d}z = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-1}\ln^2 z\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^1 z^{n-1}\ln^2 z\mathrm{d}z$, *et utiliser ensuite les valeurs connues de* $L_2\left(\frac{1}{2}\right)$ *et* $L_3\left(\frac{1}{2}\right)$.

1.2 Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\ln(\cos x)\ln(\sin(x))}{\cos x \sin x}\mathrm{d}x$

Posons $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\ln(\cos x)\ln(\sin(x))}{\cos x \sin x}\mathrm{d}x$ et $K = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\ln(\cos x)\ln(\sin(x))}{\cos x \sin x}\mathrm{d}x$ alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\ln(\cos x)\ln(\sin(x))}{\cos x \sin x}\mathrm{d}x = J + K$$

Mais le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ dans K donne

$$K = \frac{\pi}{2}I - J = \frac{\pi\zeta(3)}{8} - J$$

ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\ln(\cos x)\ln(\sin x)}{\cos x \sin x}dx = \frac{\pi\zeta(3)}{16}$$

1.3 Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos u)\ln(\tan u)}{\tan u}du$ et de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan u \ln(\cos u)\ln(\tan u)\,du$

Le changement de variable $t = \tan u$ donne

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos u)\ln(\tan u)}{\tan u}du &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{1+t^2}\frac{\ln t}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n H_n t^{2n} \times \frac{\ln t}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n H_n \int_0^1 t^{2n-1}\ln t\,dt \\
&= \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{n^2} = \frac{5}{64}\zeta(3)
\end{aligned}$$

Le même genre de méthode conduit à

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan u \ln(\cos u)\ln(\tan u)\,du &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{1+t^2} t\ln t\,dt \\
&= \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{(n+1)^2} = \frac{\zeta(3)}{64}
\end{aligned}$$

en sommant ces deux intégrales, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos u)\ln(\tan u)}{\cos u \sin u}du = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln\left(1+t^2\right)\ln t}{t}dt = \frac{3}{32}\zeta(3)$$

et en développant, compte tenu de (2), on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln^2(\cos u)}{\cos u \sin u}du = \frac{1}{32}\zeta(3)$$

Remarque 2 *En posant $z = \cos u$ dans cette dernière intégrale, on obtient*

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\ln^2 z}{z\left(1-z^2\right)}dz$$

cette dernière intégrale se calcule directement avec Maple.

Remarque 3 *On a (poser* $t = \tan u$*)*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln^2(\cos u)\tan u du &= \frac{1}{4}\int_0^1 \ln^2\left(1+t^2\right)\frac{t}{1+t^2}\,dt\\ \int_0^1 \ln^2\left(1+t^2\right)\frac{t}{1+t^2}\,dt &= \frac{\ln^3 2}{2} - 2\int_0^1 \ln^2\left(1+t^2\right)\frac{t}{1+t^2}\,dt \text{ (par parties, en dérivant } \ln^2\left(1+t^2\right)\text{)}\end{aligned}$$

ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln^2(\cos u)\tan u du = \frac{\ln^3 2}{24}$$

Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$*, on montre de même que*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln^n\left(1+t^2\right)t}{1+t^2}\,dt &= \frac{\ln^{n+1}(2)}{2(n+1)}\\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln^n(\cos u)\tan u du &= \frac{(-1)^n\ln^{n+1}(2)}{2^{n+1}(n+1)}\end{aligned}$$

Remarque 4 *Maple (après quelques manipulations donne les évaluations suivantes*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos u)}{\cos u \sin u}du = -\frac{\pi^2}{48} = -\frac{\zeta(2)}{8}$$

Mais il ne semble pas avoir de généralisations (pas d'entiers a *tels que* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln^3(\cos u)}{\cos u \sin u}du = a\zeta(4)\cdots$*).*

1.4 Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\operatorname{ch} x)\ln(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}dx$

Numériquement, on a

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\operatorname{ch} x)\ln(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}dx = \frac{\zeta(3)}{8}$$

En posant $u = \operatorname{sh} x$, on

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+u^2\right)}{(1+u^2)}\frac{\ln u}{u}du$$

Le changement $u = \frac{1}{t}$ dans $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{1+t^2}\frac{\ln t}{t}\,dt$ donne

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{1+t^2}\frac{\ln t}{t}\,dt = -\int_0^1 \frac{\ln\left(1+u^2\right)}{1+u^2}u\ln u\,du + 2\int_0^1 \frac{u\ln^2 u}{1+u^2}du$$

ainsi

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{\ln\left(1+u^2\right)}{(1+u^2)}\frac{\ln u}{u}du - \int_0^1 \frac{\ln\left(1+u^2\right)}{1+u^2}u\ln u\,du + 2\int_0^1 \frac{u\ln^2 u}{1+u^2}du\right)$$

Or on a vu que $\int_0^1 \frac{\ln\left(1+u^2\right)}{(1+u^2)}\frac{\ln u}{u}du = -\frac{5}{32}\zeta(3)$, $\int_0^1 \frac{\ln\left(1+u^2\right)}{1+u^2}u\ln u\,du = -\frac{1}{32}\zeta(3)$ et enfin

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 \frac{u\ln^2 u}{1+u^2}du &= 2\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^{2n+1}\ln^2 u du = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 u^{2n+1}\ln^2 u du \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2(n+1)^3} = \frac{3}{8}\zeta(3)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\operatorname{ch}x)\ln(\operatorname{sh}x)}{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x}dx &= \frac{\zeta(3)}{8} \\
\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+u^2\right)}{(1+u^2)}\frac{\ln u}{u}du &= \frac{\zeta(3)}{4}
\end{aligned}$$

1.4.1 Une série déduite

Dans l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\operatorname{ch}x)\ln(\operatorname{sh}x)}{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x}dx$, le changement de variable $t = e^{-2x}$ conduit (après quelques manipulations)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\operatorname{ch}x)\ln(\operatorname{sh}x)}{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x}dx = 2\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1-t}{2}\right)\ln\left(\frac{1+t}{2}\right)}{1-t^2}dt + 2\ln 2\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}dt - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2 t}{t^2-1}dt - \int_0^1\frac{\ln t\ln\left(1-t^2\right)}{1-t^2}dt$$

Or Mathématica donne l'évaluation

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1-t}{2}\right)\ln\left(\frac{1+t}{2}\right)}{1-t^2}dt = \frac{\zeta(3)}{2}$$

et on a les évaluations classiques (développer en séries $\frac{1}{1-t^2}$ et intervertir $\int$ et $\sum$), $\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}dt = -\frac{\pi^2}{8}$, $\int_0^1\frac{\ln^2 t}{t^2-1}dt = -\frac{7}{4}\zeta(3)$. On a

$$\int_0^1\frac{\ln t\ln\left(1-t^2\right)}{1-t^2}dt = \frac{7}{4}\zeta(3) - \frac{\pi^2\ln 2}{4}$$

Avec $t = z^2$, on a

$$\int_0^1\frac{\ln(1-z)}{1-z}\frac{\ln z}{\sqrt{z}}dz = 7\zeta(3) - \pi^2\ln 2$$

ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^2} = \frac{7}{4}\zeta(3) - \frac{\pi^2\ln 2}{4}$$

Dans $\int_0^1\frac{\ln t\ln\left(1-t^2\right)}{1-t^2}dt$, les changements $t = \sin u$ et $t = \cos u$ donnent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin u)\ln(\cos u)}{\cos u}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin u)\ln(\cos u)}{\sin u}du = \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{\pi^2\ln 2}{8}$$

La dernière intégrale permet de calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\tan u)\ln(\cos u)}{\sin u}du$, en effet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin u)\ln(\cos u)}{\sin u}du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\tan u)\ln(\cos u)}{\sin u}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln^2(\cos u)}{\sin u}du$$

Or si $n \geq 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln^n(\cos u)}{\sin u}du \underset{z=\cos u}{=} \int_0^1 \frac{\ln^n z}{1-z^2}\,dz = \frac{n!\zeta(n+1)}{2^{n+1}-1} \text{ (developper } \frac{1}{1-z^2} \text{ en série}\cdots)$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{cotan} u)\ln(\cos u)}{\sin u}du = \frac{\pi^2\ln 2}{8} + \frac{7}{8}\zeta(3)$$

De même

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\tan u)\ln(\sin u)}{\cos u}du = \frac{\pi^2\ln 2}{8} + \frac{7}{8}\zeta(3)$$

En combinant avec (3) on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin u)\ln(\cos u)(7-2\cos u)}{\sin 2u} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin u)\ln(\cos u)(7-2\sin u)}{\sin 2u} = \frac{\pi^2\ln 2}{8}$$

Remarque 5 *On a si* $n \geq 1$, $H_{2n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$, *or c'est un exercice classique que de montrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = -\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$$

Si on pose

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

alors par un produit de Cauchy,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n x^n = -\frac{\ln(1+x)}{1-x}$$

On vient de prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_{2n+1} + U_{2n} - \frac{1}{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{7}{4}\zeta(3) - \frac{\pi^2\ln 2}{4}$. *Or* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_{2n+1}}{(2n+1)^2}x^{2n+1} = \frac{f_2^1(x) - f_2^1(-x)}{2}$ *d'où*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{f_2^1(1) - f_2^1(-1)}{2} = \frac{21}{16}\zeta(3)$$

Ce qui prouve que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{U_{2n}}{(2n+1)^2} = \frac{7}{4}\zeta(3)-\frac{\pi^2\ln 2}{4}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_{2n+1}}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$$
$$= \frac{7}{4}\zeta(3)-\frac{\pi^2\ln 2}{4}-\left(\frac{21}{16}\zeta(3)-1\right)+\left(\frac{7}{8}\zeta(3)-1\right)$$
$$= \frac{21}{16}\zeta(3)-\frac{\pi^2\ln 2}{4}$$

1.5 Autour du calcul de $\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1-t}{2}\right)\ln\left(\frac{1+t}{2}\right)}{1-t^2}dt$

Le changement de variable $t=e^{-2x}$ donne

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1-t}{2}\right)\ln\left(\frac{1+t}{2}\right)}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{(\ln(\operatorname{ch}x)-x)(\ln(\operatorname{sh}x)-x)}{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x}dx \tag{4}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\operatorname{ch}x)\ln(\operatorname{sh}x)}{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x\ln(\operatorname{ch}x)}{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x\ln(\operatorname{sh}x)}{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x}dx$$

Or Mathématica donne les évaluations suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\arg\operatorname{th}^2 u}{u}du=\frac{7\zeta(3)}{8}$$

Remarque 6 *On a également*

$$\int_0^1 \frac{\arctan^2 u}{u}du=\frac{4\pi G}{8}-\frac{7\zeta(3)}{8}$$

ainsi

$$\int_0^1 \frac{\arctan^2 u+\operatorname{argth}^2 u}{u}du=\frac{4\pi G}{8}$$

et le changement de variable $u=\arg\operatorname{th}x$ donne

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}dx=\frac{7\zeta(3)}{8}$$

Remarque 7 *Et* $u=\arctan x$ *conduit à*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2}{\sin x\cos x}dx=\frac{4\pi G}{8}-\frac{7\zeta(3)}{8}$$

Et Maple donne les évaluations $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\sin x\cos x}dx=\int_0^1\frac{\arctan u}{u}du=G$, $.\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}dx=\int_0^1\frac{\arg\operatorname{th}u}{u}du=\frac{\pi^2}{8}$*).*

De même, $u = \tanh x$ donne

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x \ln(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} dx &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^2(1-u) - \ln^2(1+u)}{u} du \qquad (5)\\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^2(1-u)}{u} du - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^2(1+u)}{u} du\end{aligned}$$

Or en intégrant par parties (on dérive les $\ln^2$), on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{1-u} \ln u du + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{1+u} \ln u du$$

Or on a vu, cf (1) que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{1+u} \ln u du = -\frac{\zeta(3)}{8}$, la même méthode donne $\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{1-u} \ln u du = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} H_n u^n \ln u du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^2} = \zeta(3)$. Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} dx = \frac{7}{16}\zeta(3)$$

et immédiatement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \ln(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} dx = \frac{7}{8}\zeta(3)$$

Enfin, avec $u = \operatorname{th} x$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x \ln(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} dx - \int_0^{+\infty} \frac{x \ln(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{x \ln(\operatorname{th} x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} dx\\ &= \int_0^1 \frac{\operatorname{arg\,th} u}{u} \ln(u) du\\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n} \ln u}{2n+1} du\\ &= -\frac{7}{8}\zeta(3)\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} dx = -\frac{7}{16}\zeta(3)$$

Ainsi dans la décomposition de (4), toutes les intégrales sont des multiples de $\zeta(3)$.

Pour finir,le changement de variable $u = \coth x$ dans $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} dx$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} dx = -\frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(1+u) - \ln^2(-1+u)}{u} du = -\frac{7}{16}\zeta(3)$$

En combinant avec (5), on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(1+u) - \ln^2|1-u|}{u} du = 0$$

1.6 Résultats "en vrac"

- Maple donne l'évaluation suivante, si $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or

$$\int_{\frac{1}{\varphi}}^{1} \frac{\ln^2 z}{z\left(1-z^2\right)} dz = \frac{1}{6}\ln^3 \varphi + \frac{1}{20}\zeta(3)$$

en posant $z = \cos u$, on a alors

$$\int_0^{\arccos \frac{1}{\varphi}} \frac{\ln^2(\cos u)}{\cos u \sin u} du = \frac{1}{6}\ln^3 \varphi + \frac{1}{20}\zeta(3)$$

puis avec $t = \tan u$

$$\int_0^{\sqrt{\varphi}} \frac{\ln^2\left(1+t^2\right)}{t} dt = \frac{2}{3}\ln^3 \varphi + \frac{1}{5}\zeta(3)$$

- Une conjecture

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln(\operatorname{ch} x)\ln(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} dx = \frac{\pi^4}{192}$$

- Le résultat classique

$$\int_0^1 \frac{t\ln^2 t}{1+t^2} dt = \frac{3}{16}\zeta(3)$$

peut s'écrire, en posant $t = \tan x$

$$\int_0^1 \tan x \ln^2(\tan x)\, dx = \frac{3}{16}\zeta(3)$$

2 Autour de la série harmonique altérnée

On a vu (cf remarque 5)que si on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$, alors par un produit de Cauchy,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n x^n = -\frac{\ln(1+x)}{1-x}$$

Par intégration on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{U_n}{n+1} x^{n+1} &= -\frac{\ln^2(2)}{2} + \frac{\pi^2}{12} + \ln(2)\ln(1-t) - L_2\left(\frac{1-t}{2}\right) \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{U_n}{n} x^n &= -\frac{\ln^2(2)}{2} + \frac{\pi^2}{12} + \ln(2)\ln(1-t) - L_2\left(\frac{1-t}{2}\right) + L_2(-t)
\end{aligned}$$

2.1 Application au calcul de quelques séries

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\text{avec } x &= -1 \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n U_n}{n+1} &= \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2(2)}{2} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n U_n}{n} &= \frac{\pi^2}{12} + \frac{\ln^2(2)}{2} \\
\text{avec } x &= i \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n U_{2n}}{2n+1} &= G - \frac{3}{8}\pi \ln(2) \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n U_{2n+1}}{2n+1} &= -\frac{3}{8}\pi \ln(2) \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n U_{2n+1}}{n+1} &= -\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}\ln^2(2) \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n U_{2n}}{n} &= \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{4}\ln^2(2)
\end{aligned}$$

On a donc par combinaison

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(1+n)n} U_n &= \frac{\pi^2}{6} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n U_n}{n(1+n)} &= \ln^2(2)
\end{aligned}$$

Avec $x = \frac{1}{2}$, en utilisant les deux expressions que l'on combine ensemble, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n+4)U_n}{n(n+1)2^n} = -\frac{\pi^2}{6} - \ln^2(2)$$

Mathematica donne, par intégration

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{U_n}{n^2} &= \frac{\zeta(3) - \pi^2 \ln(2)}{4} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n U_n}{n^2} &= \frac{\pi^2 \ln(2)}{4} - \frac{5\zeta(3)}{8} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n U_{2n}}{n^2} &= \pi G - \frac{33}{16}\zeta(3)
\end{aligned}$$

par sommation, on a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n \frac{1+(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{U_{2n}}{n^2} = -\frac{3}{4}\zeta(3)$$

Remarque 8 *Certains des résultats obtenus n'ont rien de nouveau, il suffit d'utiliser les analogues avec* H_n *et la relation*

$$U_{2n} = H_n - H_{2n}$$