

# Formules BBP en base 3

G.Huvent

<http://perso.wanadoo.fr/gery.huvent>

5 avril 2001

Le lien entre les intégrales du type  $\int_0^1 \frac{P(y)}{\alpha - y^b} dy$  et les formules BBP est détaillé dans [Huvent]

## 1 Formules immédiates

Un calcul élémentaire montre que

$$\begin{aligned} & a \int_0^1 2 \frac{y}{y^2 - 3} dy + b \int_0^1 2 \frac{y}{y^2 + 3} dy + c \int_0^1 \frac{2y - 3}{y^2 - 3y + 3} dy + d \int_0^1 \frac{dy}{y^2 + 3} + e \int_0^1 \frac{dy}{y^2 - 3y + 3} \\ = & a (\ln(2) - \ln(3)) + b (\ln(4) - \ln(3)) - c \ln(3) + d \frac{\sqrt{3}\pi}{18} + e \frac{\sqrt{3}\pi}{9} \\ = & (a + 2b) \ln(2) - (a + b + c) \ln(3) + \frac{(d + 2e)}{18} \pi \sqrt{3} \end{aligned}$$

En annulant les coefficients de  $\ln(2)$  et  $\ln(3)$ , on obtient la formule BBP pour  $\pi\sqrt{3}$  :

$$\begin{aligned} (-d + 2e) \pi \sqrt{3} &= \frac{2}{81} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{729^i} \left( \frac{729b - 243e - 243d}{12i + 1} + \frac{-1215b - 243e}{12i + 2} + \frac{81d - 162e}{12i + 3} \right. \\ &+ \frac{-243b - 81e}{12i + 4} + \frac{-81b - 27d - 27e}{12i + 5} - 216 \frac{b}{12i + 6} \\ &\left. + \frac{-27b + 9d + 9e}{12i + 7} + \frac{-27b + 9e}{12i + 8} + \frac{-3d + 6e}{12i + 9} + \frac{-15b + 3e}{12i + 10} + \frac{3b + d + e}{12i + 11} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Le cas particulier suivant est le plus élégant :

$$\pi \sqrt{3} = -\frac{2}{3^3} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^{6i}} \left( \frac{3^4}{12i + 2} + \frac{3^4}{12i + 3} + \frac{3^3}{12i + 4} - \frac{3}{12i + 8} - \frac{3}{12i + 9} - \frac{1}{12i + 10} \right) \quad \left( b = 0, d = -e = \frac{1}{3} \right)$$

## 2 Intégrales avec $\ln(y)$

Il existe  $(p, q, r)$  réels tels que

$$\begin{aligned} I_1(a, b, c) &= a \int_0^1 \frac{2y \ln(y)}{y^2 - 3} dy + b \int_0^1 \frac{2y \ln(y)}{y^2 + 3} dy + c \int_0^1 \frac{\ln(y)(2y - 3)}{y^2 - 3y + 3} dy \\ &= (a + 2b) \times p - (a + b + c) \times q + c \times r \end{aligned}$$

( les deux membres sont des formes linéaires en  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  décomposées sur deux base différentes du dual de  $\mathbb{R}^3$ )  
Plouffe a montré que

$$\pi^2 = \frac{2}{27} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{729^i} \left( \frac{243}{(12i+1)^2} - \frac{405}{(12i+2)^2} - \frac{81}{(12i+4)^2} - \frac{27}{(12i+5)^2} - \frac{72}{(12i+6)^2} - \frac{9}{(12i+7)^2} - \frac{9}{(12i+8)^2} - \frac{5}{(12i+10)^2} + \frac{1}{(12i+11)^2} \right)$$

ce qui traduit sous forme intégrale, donne

$$-2 \int_0^1 2 \frac{\ln(y)y}{y^2-3} dy + \int_0^1 2 \frac{\ln(y)y}{y^2+3} dy + \int_0^1 \frac{\ln(y)(2y-3)}{y^2-3y+3} dy = \frac{\pi^2}{18}$$

et correspond à l'égalité  $I_1(-2, 1, 1) = r = \frac{\pi^2}{18}$ . On en déduit la valeur de r.

Or on a

$$\begin{aligned} I_1(1, 1, 0) &= \int_0^1 2 \frac{\ln(y)y}{y^2-3} dy + \int_0^1 2 \frac{\ln(y)y}{y^2+3} dy \\ &= \frac{1}{4} L_2\left(\frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

où  $L_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$

On en déduit

$$3p - 2q = \frac{1}{4} L_2\left(\frac{1}{9}\right) \quad (3)$$

Mais Ramanujan a prouvé que

$$L_2\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6} L_2\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{\pi^2}{18} - \frac{\ln^2(3)}{6}$$

En utilisant

$$\begin{aligned} I_1(1, 0, 0) &= \int_0^1 \frac{2y \ln(y)}{y^2-3} \\ &= \frac{1}{2} L_2\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

On en déduit

$$I_1\left(\frac{8}{6}, -\frac{4}{6}, 0\right) = L_2\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6} L_2\left(\frac{1}{9}\right)$$

et

$$-\frac{2}{3}q = \frac{\pi^2}{18} - \frac{\ln^2(3)}{6} \quad (4)$$

De (3) et (4) on tire les valeurs de p et q et l'égalité

$$I_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} - \mathbf{b} + 5\mathbf{c}) \frac{\pi^2}{36} + (-\mathbf{a} + \mathbf{b} - 3\mathbf{c}) \frac{\ln^2(3)}{12} + (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \frac{L_2\left(\frac{1}{9}\right)}{12}$$

**Remarque 1**  $I_1\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) = L_2\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}L_2\left(\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{18}\pi^2 + \frac{1}{6}\ln^2 3$  est une autre relation prouvée par Ramanujan.

**Remarque 2**

$$\begin{aligned} I_1(-10, 5, 3) &= \frac{1}{2}\ln^2 3 \\ &= \int_0^1 -20 \frac{\ln(y)y}{y^2-3} + 10 \frac{\ln(y)y}{y^2+3} + 3 \frac{\ln(y)(2y-3)}{y^2-3y+3} dy \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(y)P(y)}{y^{12}-729} dy \end{aligned}$$

$$\text{où } P(y) = 4y^{11} - 9y^{10} + 81y^9 + 117y^7 + 81y^6 + 972y^5 + 243y^4 + 1053y^3 + 6561y - 2187$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\ln^2 3 &= -729 \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{729^k} \left( \frac{4}{(12k+12)^2} - \frac{9}{(12k+11)^2} + \frac{81}{(12k+10)^2} + \frac{117}{(12k+8)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{81}{(12k+7)^2} + \frac{972}{(12k+6)^2} + \frac{243}{(12k+5)^2} + \frac{1053}{(12k+4)^2} + \frac{6561}{(12k+2)^2} - \frac{2187}{(12k+1)^2} \right) \end{aligned}$$

**Remarque 3**  $I_1(a, b, 0) = (a-b)\left(\frac{\pi^2}{36} - \frac{\ln^2(3)}{12}\right) + (a+2b)\frac{L_2\left(\frac{1}{9}\right)}{12} = a \int_0^1 2 \frac{\ln(y)y}{y^2-3} dy + b \int_0^1 2 \frac{\ln(y)y}{y^2+3} dy$ , avec  $a = -2$  et  $b = 1$  et le changement de variable  $u = y^2$ , on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(u)(u+9)}{u^2-9} du = \frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{2}\ln^2(3)$$

et l'égalité

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{9^i i^2} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{9^i \left(i + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}\pi^2 - 2\ln^2(3)$$

**Remarque 4**

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{9^i i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{9^i \left(i + \frac{1}{2}\right)} = 2\ln 3$$

### 3 Intégrales avec $\ln^2(y)$

Il existe  $(p_2, q_2, r_2)$  réels tels que

$$\begin{aligned} I_2(a, b, c) &= a \int_0^1 2 \frac{\ln^2(y)y}{y^2-3} dy + b \int_0^1 2 \frac{\ln^2(y)y}{y^2+3} dy + c \int_0^1 \frac{\ln^2(y)(2y-3)}{y^2-3y+3} dy \\ &= (a-b+5c)\frac{\pi^2}{36} \times p_2 + (-a+b-3c)\frac{\ln^2(3)}{12} \times q_2 + (a+2b)\frac{L_3\left(\frac{1}{9}\right)}{12} \times r_2 \end{aligned}$$

Le calcul de  $r_2$  est élémentaire car

$$\begin{aligned} I_2(1, 1, 0) &= \int_0^1 2 \frac{\ln^2(y)y}{y^2-3} dy + \int_0^1 2 \frac{\ln^2(y)y}{y^2+3} dy \\ &= -\frac{L_3\left(\frac{1}{9}\right)}{8} \\ &= \frac{L_3\left(\frac{1}{9}\right)}{4} \times r_2 \end{aligned}$$

**Proposition 5** On a

$$\frac{13}{2} \zeta(3) - 6L_3\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi^2 \ln(3)}{2} + 3L_3\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\ln^3(3)}{2} = 0 \quad (5)$$

Cette relation est équivalente à

$$\begin{aligned} L_3\left(\frac{1}{9}\right) - 12L_3\left(\frac{1}{3}\right) &= -\frac{2\ln^3(3)}{3} - \frac{26\zeta(3)}{3} + \frac{2\pi^2 \ln(3)}{3} \\ L_3\left(\frac{1}{9}\right) - 6L_3\left(-\frac{1}{3}\right) &= \frac{\ln^3(3)}{3} + \frac{13\zeta(3)}{3} - \frac{\pi^2 \ln(3)}{3} \end{aligned}$$

**Preuve.** L'équation de Kummer pour les polylogarithmes d'ordre 3 s'écrit

$$\begin{aligned} L_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) + L_3(xy) + L_3\left(\frac{x}{y}\right) &= 2L_3\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) + 2L_3\left(-\frac{x(1-y)}{1-x}\right) \\ &+ 2L_3\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + 2L_3\left(-\frac{1-y}{y(1-x)}\right) \\ &+ 2L_3(x) + 2L_3(y) \\ &- 2\zeta(3) + \ln^2(y) \ln\left(\frac{1-y}{1-x}\right) - \frac{\pi^2}{3} \ln(y) - \frac{\ln^3(y)}{3} \end{aligned}$$

Avec  $x = \frac{2}{3}$  et  $y = \frac{1}{3}$ , on obtient

$$\begin{aligned} 4L_3\left(\frac{3}{2}\right) + 2L_3(-3) - 2L_3\left(\frac{1}{3}\right) - L_3\left(\frac{4}{3}\right) &= \frac{4}{3}\pi^2 \ln(2) - \pi^2 \ln(3) - \frac{2}{3}\ln^3(2) \\ &+ \frac{1}{2}\ln^3(3) - \ln(2) \ln^2(3) + 2\ln^2(2) \ln(3) \\ &+ i\left(\frac{3}{2}\ln^3(3)\pi - 2\ln(2) \ln(3)\pi\right) \end{aligned} \quad (6)$$

L'équation de Landen est

$$L_3(z) + L_3(1-z) + L_3\left(\frac{z}{z-1}\right) = \zeta(3) + \frac{\pi^2}{6} \ln(1-z) - \frac{1}{2} \ln(z) \ln^2(1-z) + \frac{1}{6} \ln^3(1-z)$$

Appliquée à  $z = \frac{3}{4}$  et à  $z = \frac{2}{3}$ , elle permet d'exprimer  $L_3\left(\frac{3}{4}\right)$  et  $L_3\left(\frac{2}{3}\right)$  en fonction de  $L_3\left(\frac{1}{3}\right)$ ,  $L_3(-2)$ ,  $L_3\left(-\frac{1}{3}\right)$  et  $L_3\left(\frac{1}{4}\right)$ . La relation

$$L_3\left(\frac{1}{z}\right) = L_3(z) + \ln(-z) \frac{\pi^2}{6} + \frac{\ln^3(-z)}{6}$$

appliquée à  $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, -2$  et  $-3$  permet de simplifier le membre de gauche de (6).  
Il reste ensuite à utiliser les deux égalités suivantes

$$\begin{aligned} L_3\left(\frac{1}{2}\right) + L_3\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4}L_3\left(\frac{1}{4}\right) && \text{(Formule de duplication)} \\ L_3\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{\pi^2 \ln(2)}{12} + \frac{\ln^3(2)}{6} \end{aligned}$$

pour conclure ■

Avec  $\int_0^1 2 \frac{\ln^2(y)y}{y^2-3} dy = -\frac{1}{2}L_3\left(\frac{1}{3}\right)$  et  $\int_0^1 2 \frac{\ln^2(y)y}{y^2+3} dy = -\frac{1}{2}L_3\left(-\frac{1}{3}\right)$ , (5) peut s'écrire

$$\begin{aligned} I_2(-12, 6, 0) &= \frac{13}{2}\zeta(3) - \frac{\pi^2 \ln(3)}{2} + \frac{\ln^3(3)}{2} \\ &= -\frac{\pi^2}{2}p_2 + \frac{3}{2}\ln^2(3) q_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Si on remplace  $p_2$  par sa valeur en fonction de  $q_2$ , le membre de droite de  $I_2(a, b, c)$  devient un polynôme de degré 1 en  $q_2$  dont le coefficient de  $q_2$  est égal à  $\frac{\ln^3(3)}{6}c$ . Ainsi  $I_2(a, b, 0)$  ne dépend pas de  $q_2$ . Après calculs, on obtient

$$a \int_0^1 \frac{2 \ln^2(y)y}{y^2-3} dy + b \int_0^1 \frac{2 \ln^2(y)y}{y^2+3} dy = -\frac{(a+2b)}{12}L_3\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{(-a+b)}{36} \left(13\zeta(3) + \ln^3(3) - \frac{\pi^2 \ln(3)}{36}\right)$$

En particulier, on obtient avec  $a = 1, b = -1$

$$12 \int_0^1 \frac{y \ln^2(y)}{(y^2-3)(y^2+3)} dy = -\frac{\ln^3(3)}{18} - \frac{13}{18}\zeta(3) + \frac{L_3\left(\frac{1}{9}\right)}{24} + \frac{\pi^2 \ln(3)}{18}$$

ce qui donne l'égalité

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{9^i i^3} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{9^i \left(i + \frac{1}{2}\right)^3} = \frac{4 \left(\ln^2(3) - \pi^2\right) \ln(3)}{3} + \frac{52}{3}\zeta(3)$$

**Remarque 6** On peut aussi prendre  $a = -2, b = 1$  et faire le changement de variables  $u = y^2$  qui conduit à

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(u)(u+9)}{u^2-9} du = -\frac{1}{3}\ln^3 3 + \frac{1}{3}\pi^2 \ln 3 - \frac{13}{3}\zeta(3)$$

et à la même égalité pour les séries.

Il reste à calculer les valeurs exactes de  $p_2$  et  $q_2$ .

**Proposition 7** On a l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(y)(2y-3)}{y^2-3y+3} dy = -\frac{26}{9}\zeta(3) + \frac{5\pi^2 \ln(3)}{36} - \frac{\ln^3(3)}{12}$$

**Preuve.** L'équation de Landen appliquée à  $z = \frac{1}{z_1}$  où  $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$  est une racine de  $y^2 - 3y + 3$  (l'autre racine est  $z_2$  telle que  $\frac{1}{z_2} = 1 - \frac{1}{z_1}$ ) donne

$$\mathbf{L}_3\left(\frac{1}{z_1}\right) + \mathbf{L}_3\left(1 - \frac{1}{z_1}\right) + \mathbf{L}_3\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \zeta(3) - \frac{5\pi^2 \ln(3)}{72} + \frac{\ln^3(3)}{24} + \frac{2i\pi^3}{81}$$

Or  $\mathbf{L}_3\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = -\frac{4}{9}\zeta(3) + \frac{2i\pi^3}{81}$  et  $\int_0^1 \frac{\ln^2(y)(2y-3)}{y^2-3y+3} dy = -2\left(\mathbf{L}_3\left(\frac{1}{z_1}\right) + \mathbf{L}_3\left(\frac{1}{z_2}\right)\right)$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2(0, 0, 1) &= \int_0^1 \frac{\ln^2(y)(2y-3)}{y^2-3y+3} dy \\ &= \frac{5\pi^2}{36} p_2 - \frac{\ln^2(3)}{4} q_2 \\ &= -\frac{26}{9}\zeta(3) + \frac{5\pi^2 \ln(3)}{36} - \frac{\ln^3(3)}{12} \end{aligned} \tag{8}$$

■

En utilisant les équations (7) et (8), on en déduit que

$$\begin{aligned} p_2 &= 1 - \frac{65}{2} \frac{\zeta(3)}{\pi^2 \ln(3)} \\ q_2 &= \frac{1}{3} - \frac{13}{2} \frac{\zeta(3)}{(\ln(3))^3} \end{aligned}$$

Et ainsi

$$\mathbf{I}_2(a, b, c) = \frac{-a + b - 3c}{36} \ln^3(3) + \frac{a - b + 5c}{36} \pi^2 \ln(3) + \frac{-a - 2b}{24} \mathbf{L}_3\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{13(-a + b - 8c)}{36} \zeta(3)$$

**Remarque 8** Avec  $a = -2, b = c = 1$  on obtient

$$3 \int_0^1 \frac{\ln^2(y)(y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 24y + 9)}{(y^2 - 3)(y^2 + 3)(y^2 - 3y + 3)} dy = \frac{\pi^2 \ln(3)}{18} - \frac{65}{36} \zeta(3)$$

et la formule BBP suivante

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 \ln(3)}{18} - \frac{65}{36} \zeta(3) &= -\frac{2}{3^5} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{729^i} \left( \frac{243}{(12i+1)^3} - \frac{405}{(12i+2)^3} - \frac{81}{(12i+4)^3} - \frac{27}{(12i+5)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{72}{(12i+6)^3} - \frac{9}{(12i+7)^3} - \frac{9}{(12i+8)^3} - \frac{5}{(12i+10)^3} + \frac{1}{(12i+11)^3} \right) \end{aligned}$$

Comparer avec la Formule de Plouffe page 1.

## Références

[Huvent] G.Huvent *Formules BBP, Publications IRMA*